Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto. Studio della loro risposta ad un'onda quadra

Filtri elettrici ideali: sono quadrupoli che trasmettono un segnale di ingresso in un certo intervallo di frequenze ovvero esiste una banda di pulsazioni tale che la funzione di trasferimento:

$|\mathbf{A}(\omega)| = 1$ per $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$|\mathbf{A}(\omega)| = 0$ altrove

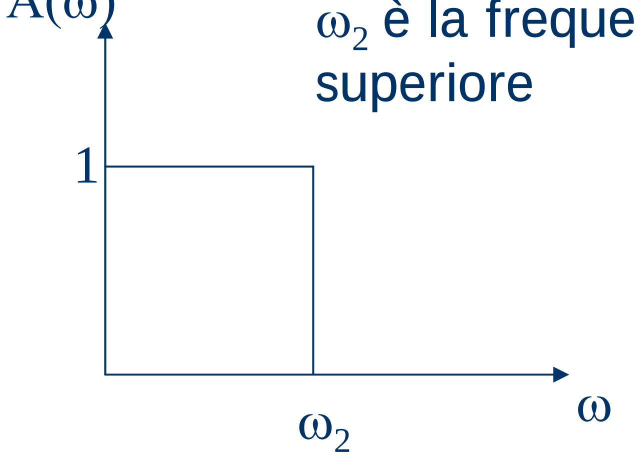
con ω_1 e ω_2 pulsazioni di taglio o critiche del filtro in corrispondenza delle quali si ha una discontinuità di $A(\omega)$. Per esempio, questo è il caso del filtro passa-banda.

I 2 tipi fondamentali di filtri ideali sono:

1) Filtro passa-basso ideale

$\omega_1 = 0$

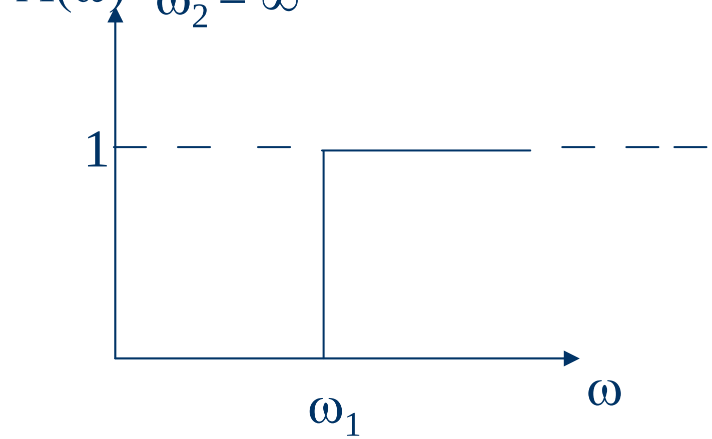
ω_2 è la frequenza di taglio superiore



2) Filtro passa-alto ideale

ω_1 è la frequenza di taglio inferiore

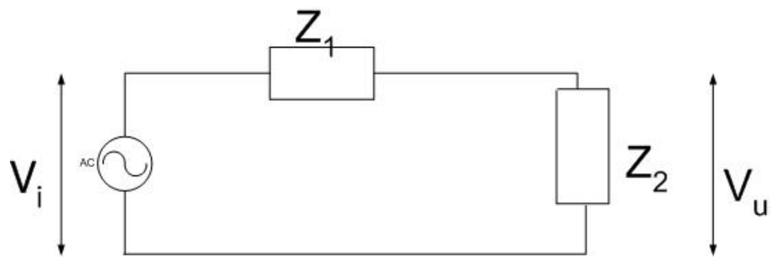
$\omega_2 = \infty$



Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Un filtro non dissipativo (che nella banda passante $[\omega_1, \omega_2]$ ha attenuazione nulla, cioè $|A(\omega)| = 1$) è un esempio di filtro ideale.
Non ‘dissipativo’ vuol dire che è costituito solo da elementi reattivi (C, L).

$\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{V_u/V_i} = Z_2/(Z_1+Z_2) = 1/(1+Z_1/Z_2)$ ⇒ $\forall\omega$, $A(\omega)$ è un numero reale



1) Filtro passa-basso ideale

$\mathbf{Z_1} = j\omega L$ e $\mathbf{Z_2} = 1/(j\omega C)$ $\omega_0 = 1/\sqrt{(\mathbf{LC})}$

$A = 1/[1+(j\omega/\omega_0)^2] = 1/(1-\omega^2/\omega_0^2)$

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A \to 1$ $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow A \to 0$

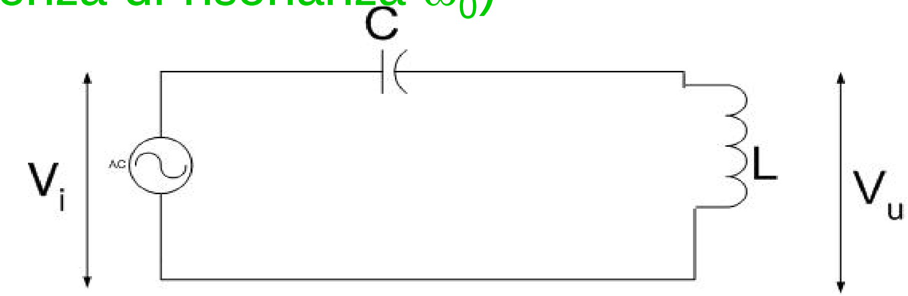
2) Filtro passa-alto ideale

$\mathbf{Z_1} = 1/(j\omega C)$ e $\mathbf{Z_2} = j\omega L$

$A = /(j\omega/\omega_0)^2 /[1+1/(j\omega/\omega_0)^2] = 1/(1-\omega_0^2/\omega^2)$

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A \to 0$ $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow A \to 1$

I circuiti LC e CL sono risonanti (frequenza di risonanza ω_0)



Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

•FFiltro passa-basso LC

$\mathbf{Z}_1 = j\omega L$ e $\mathbf{Z}_2 = 1/(j\omega C)$ $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$

$A = 1/[1+(j\omega/\omega_0)^2] = 1/(1-\omega^2/\omega_0^2)$

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A \to 1$ $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow A \to 0$

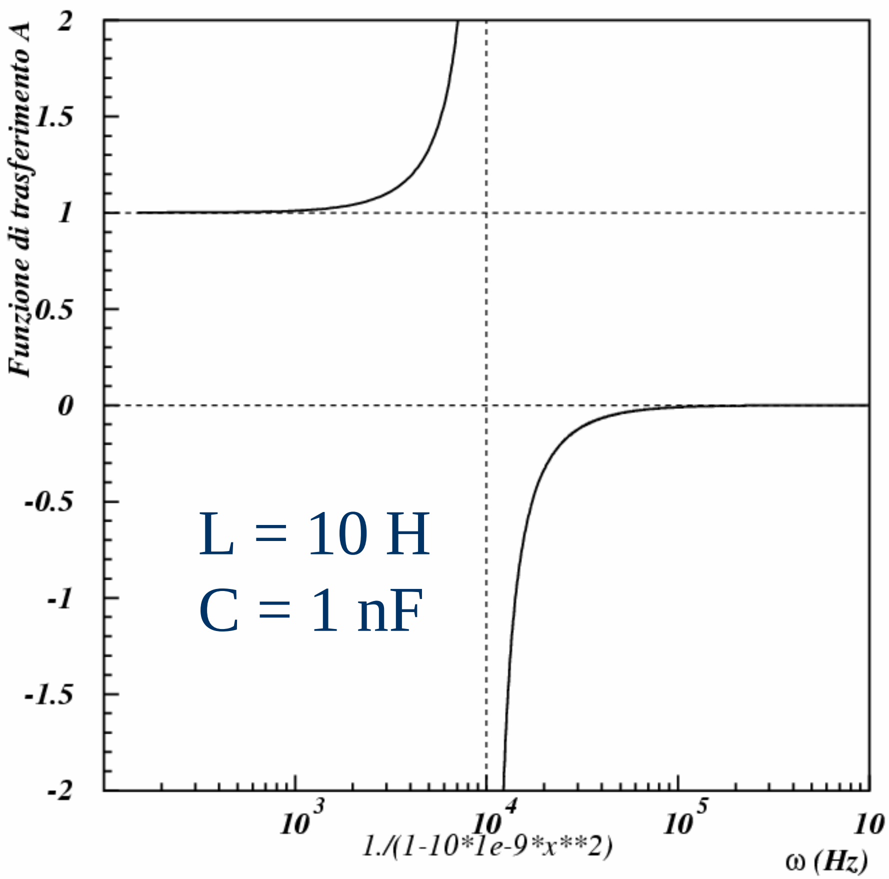
2) Filtro passa-alto CL

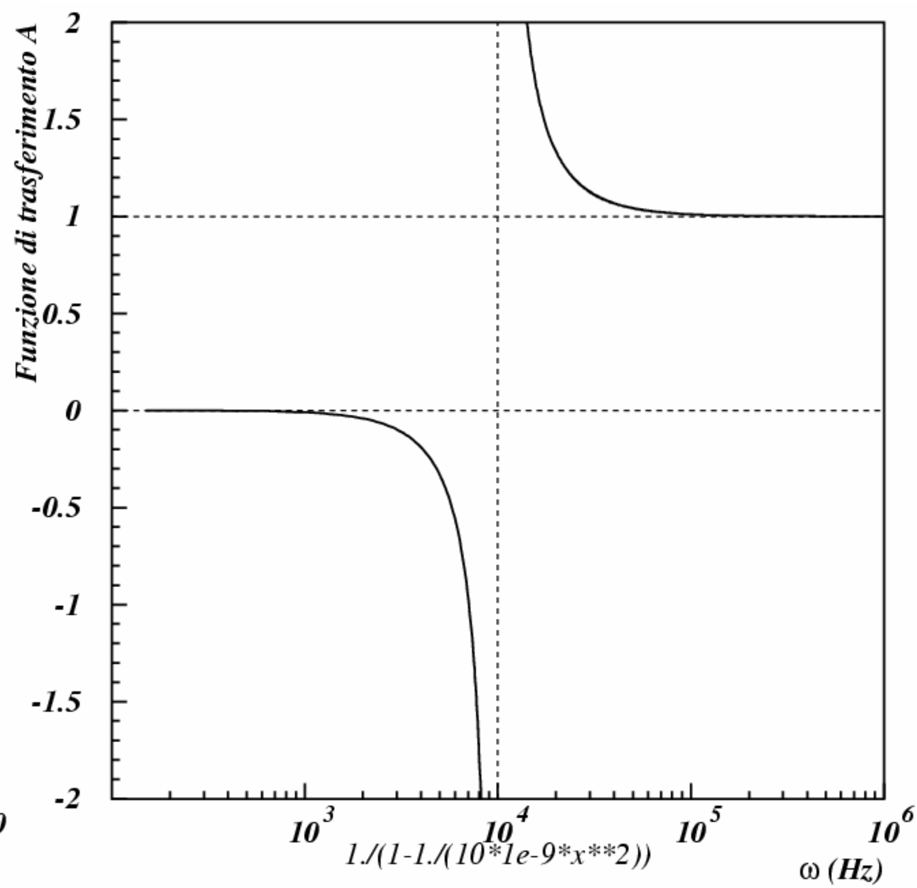
$\mathbf{Z}_1 = 1/(j\omega C)$ e $\mathbf{Z}_2 = j\omega L$

$A = /(j\omega/\omega_0)^2 /[1+1/(j\omega/\omega_0)^2] = 1/(1-\omega_0^2/\omega^2)$

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow A \to 0$ $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow A \to 1$

I circuiti LC e CL sono risonanti (frequenza di risonanza ω_0)

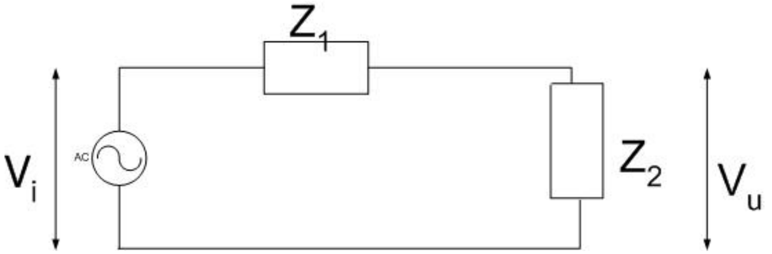




Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Nella realtà si possono costruire includendo elementi passivi (R) filtri reali che approssimano il comportamento di filtri ideali.

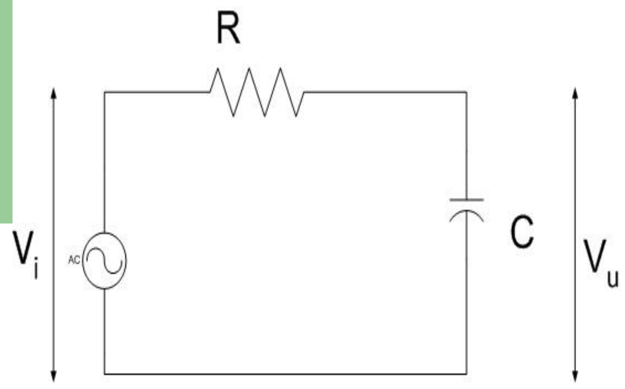
$\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{V_u / V_i} = 1/(1+Z_1/Z_2)$



Se Z_1/Z_2 $\rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\omega) \rightarrow 1 \Rightarrow$ passa-basso

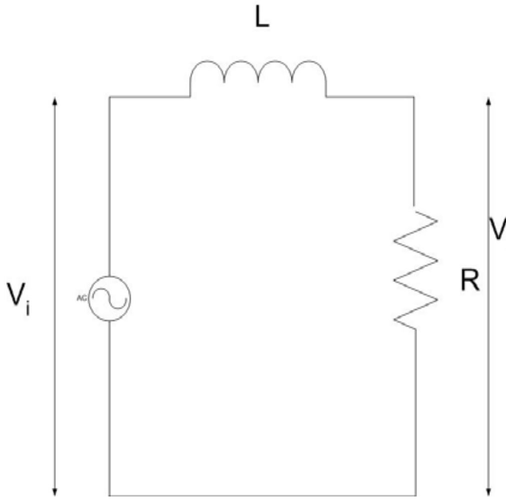
$\omega \rightarrow 0$ $\rightarrow \infty \Rightarrow \mathbf{A}(\omega) \rightarrow 0 \Rightarrow$ passa-alto

Esempi di filtri passa-basso:



$Z_1 = R$
$Z_2 = 1/(j\omega C)$

$Z_1/Z_2 = j\omega RC$
Per $\omega \rightarrow 0$
$Z_1/Z_2 = j\omega RC \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\omega) \rightarrow 1$



$Z_1 = j\omega L$
$Z_2 = R$

$Z_1/Z_2 = j\omega LC$
Per $\omega \rightarrow 0$
$Z_1/Z_2 = j\omega LC \rightarrow 0$

Filtro passa-basso RC: $\omega_1 = 0$ e $\omega_2 \neq 0$ con ω_2 pulsazione critica o di taglio superiore

$\mathbf{A}(\omega) = 1/[1 + Z_1/Z_2] = 1/[1+ j\omega RC] = (1-j\omega RC)/[1+ (\omega RC)^2] \Rightarrow$

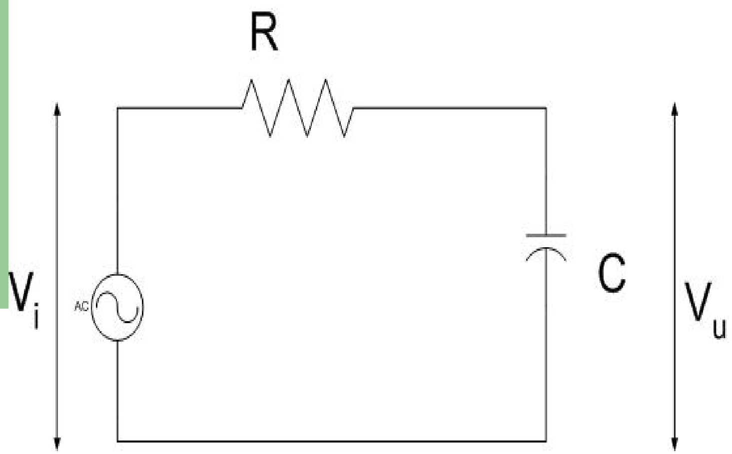
$|\mathbf{A}| = 1/[1+ (\omega RC)^2]^{1/2}$

$\tan\phi = - \omega RC$

Poiché $|\mathbf{A}|$ ha un andamento diverso dal caso del filtro ideale ed essendo graduale il passaggio da $|\mathbf{A}| = 1$ a $|\mathbf{A}| = 0$ è necessario definire la pulsazione di taglio come il valore tale che

$|\mathbf{A}(\omega_t)| = 1/\sqrt{2} = 1/[1+(RC\omega_t)^2]^{1/2} \Rightarrow$

$\omega_t = 1/RC = 1/\tau$ dove $\tau = RC$ è la costante di tempo del circuito



Quindi:

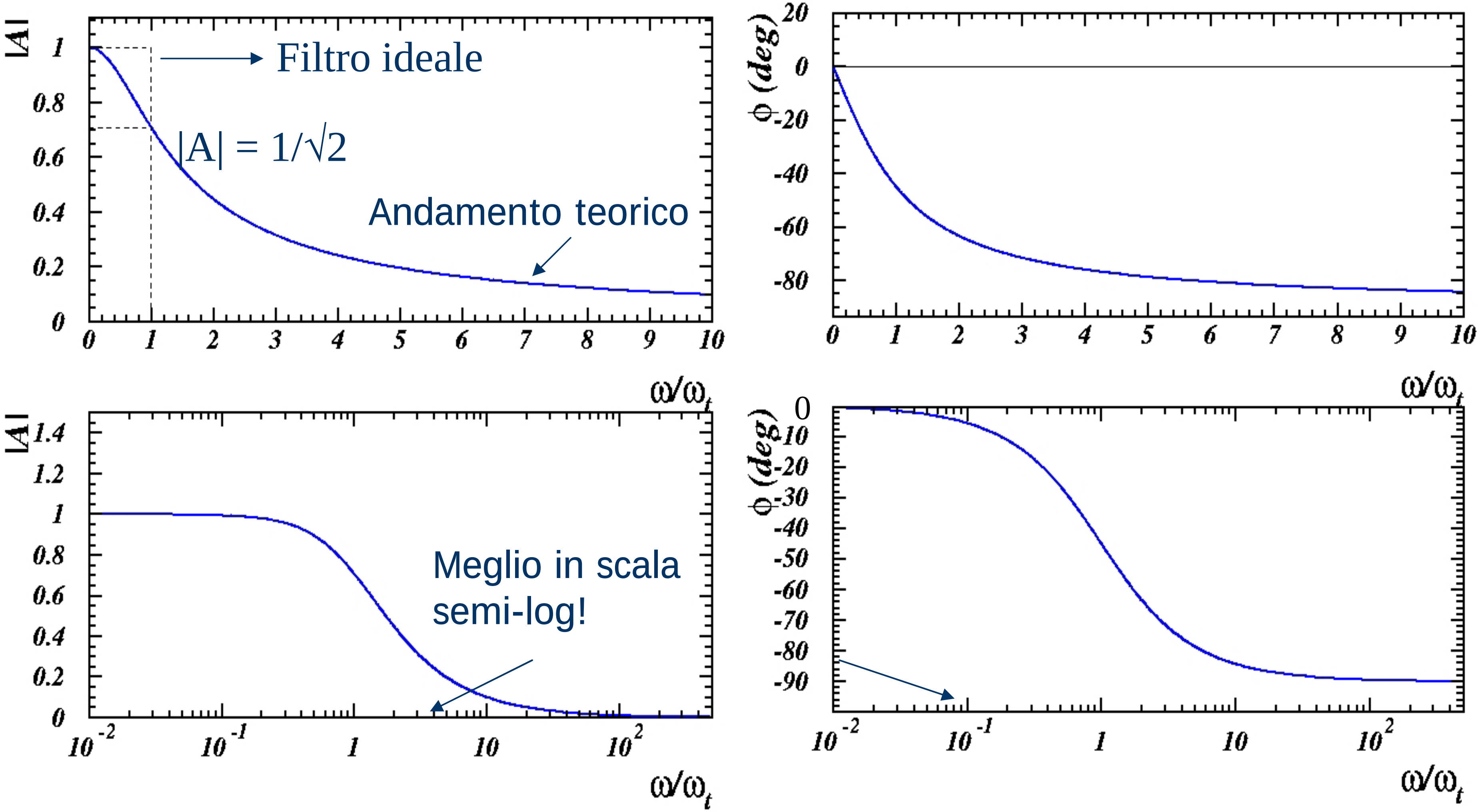
$|\mathbf{A}| = 1/[1+(\omega/\omega_t)^2]^{1/2}$

$\tan\phi = - \omega/ \omega_t$

$$\text{Se } \omega\to 0 \begin{cases} |\mathbf{A}|\to 1 \Rightarrow V_u \to V_i \\ \phi \to 0° \end{cases} \quad \text{Se } \omega \to \infty \begin{cases} |\mathbf{A}|\to 0 \Rightarrow V_u \to 0 \\ \phi \to -90° \end{cases}$$

Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Filtro passa-basso:



Il filtro passa-basso attenua le alte frequenze ($\omega >> \omega_t$)

Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Filtro passa-alto CR: $\omega_1 \neq 0$ pulsazione critica o di taglio inferiore e $\omega_2 = \infty$

$\mathbf{A}(\omega) = 1/[1+ Z_1/Z_2] = 1/[1+ 1/(j\omega RC)] = 1/[1-j/(\omega RC)] =$
$[1+j/(\omega RC)]/[1+1/(\omega RC)^2] \Rightarrow$

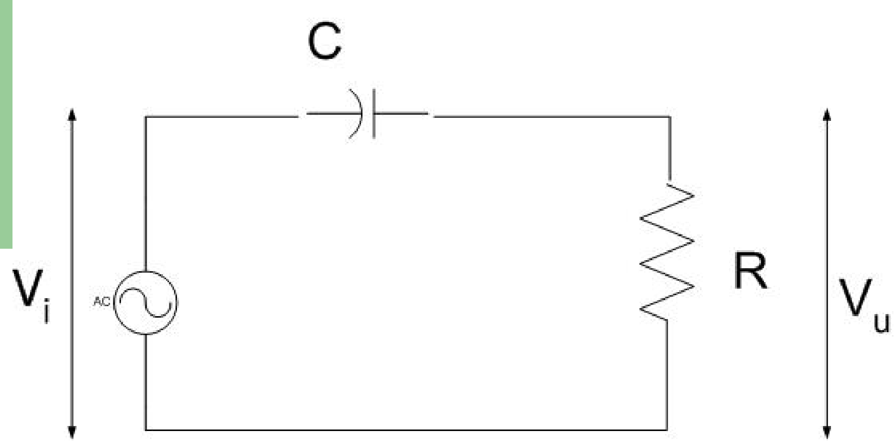
$|\mathbf{A}| = 1/ [1+ 1/(\omega RC)^2]^{1/2}$

$\tan\phi = 1/(\omega RC)$

Anche in questo caso, $\omega_t = 1/RC \Rightarrow |\mathbf{A}| = 1/ [1+ (\omega_t/\omega)^2]^{1/2}$

$\tan\phi = (\omega_t/\omega)$

$$\text{Se } \omega \to 0 \quad \begin{cases} |\mathbf{A}| \to 0 \Rightarrow V_u \to 0 \\ \phi \to 90° \end{cases}$$

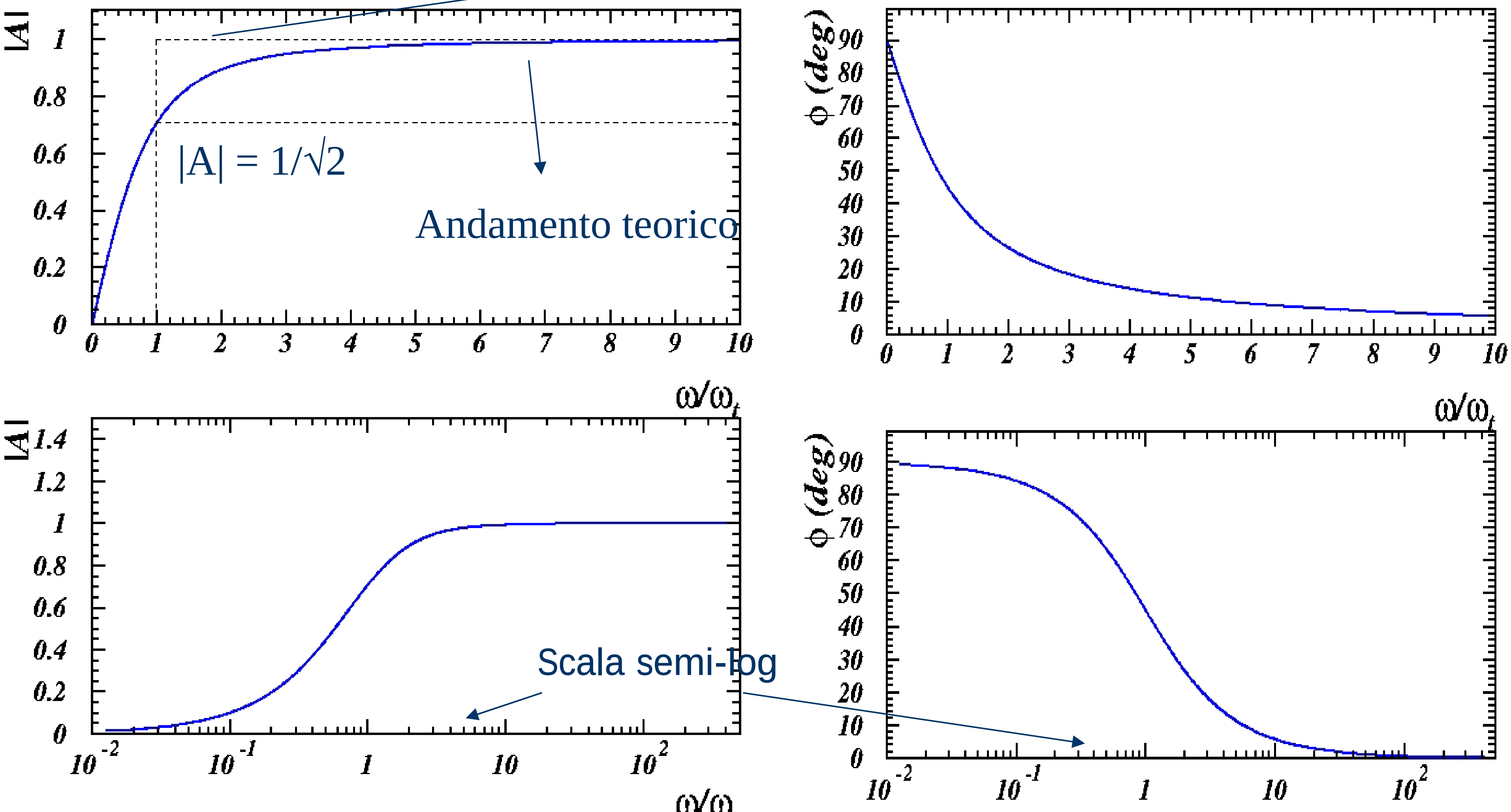


$$\text{Se } \omega \to \infty \quad \begin{cases} |\mathbf{A}| \to 1 \Rightarrow V_u \to V_i \\ \phi \to 0° \end{cases}$$

Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Filtro passa-alto:

filtro ideale



Il filtro passa-alto attenua le basse frequenze ($\omega << \omega_t$)

Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Strumentazione: oscilloscopio, generatore di forme d'onda (utilizzato con onde sinusoidali e nella seconda parte dell'esperienza con onde quadre), 2 sonde, basetta, componenti R,C

Componenti dei circuiti da realizzare:

- C = 22 nF (±10%)
- R = 1 kΩ (±1%)

Misure da effettuare:

Visualizzare il segnale di ingresso e di uscita (ai capi di C per il passa-basso e di R per il passa-alto) sui canali A e B

Si mantenga la tensione di alimentazione al valore picco-picco ε = 4 V (R_{int} = 50 Ω)

Si verifichi che l'andamento qualitativo del segnale di uscita sia quello atteso prima di cominciare a prendere le misure

Il valore atteso della pulsazione critica o di taglio è

$\omega_t = 1/(RC) = 45454.5$ rad/sec, $\tau = RC = 22\mu s$

corrispondente alla frequenza $\nu_t = 1/(2\pi RC) = 7.23$ kHz. L'errore è determinato dalle tolleranze di R e C:

$$\sigma(\omega_t) = \sqrt{\left(\frac{\partial \omega_t}{\partial R}\right)^2 \sigma^2(R) + \left(\frac{\partial \omega_t}{\partial C}\right)^2 \sigma^2(C)}$$

Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto

Tabella dei dati (in rosso sono indicate le quantità da misurare, in verde da calcolare):

V_i (V)	f.s. (V)	T (s)	f.s. (s)	ν (Hz)	ω (rad/s)	$\omega/\omega_0 \pm \sigma(\omega/\omega_0)$	V_o (V)	f.s. (V)	$A=V_o/V_i \pm \sigma(V/V_0)$	Δt (s)	f.s. (s)	$\phi \pm \sigma(\phi) = 360° * \Delta T/T$ (deg)

Intervallo di frequenze in cui effettuare le misure: ~100 Hz – ~5 MHz

Si calcolino gli errori su : |A| e ϕ

$$\sigma(|A|) = \sqrt{\left(\frac{\partial |A|}{\partial V_u}\right)^2 \sigma^2(V_u) + \left(\frac{\partial |A|}{\partial V_i}\right)^2 \sigma^2(V_i)}$$

$$\sigma(\phi) = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial (\Delta T)}\right)^2 \sigma^2(\Delta T) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}\right)^2 \sigma^2(T)}$$

Si effettui un test del χ^2 per **|A|** e ϕ calcolando la probabilità che i dati siano compatibili con le predizioni relative alle risposte dei circuiti

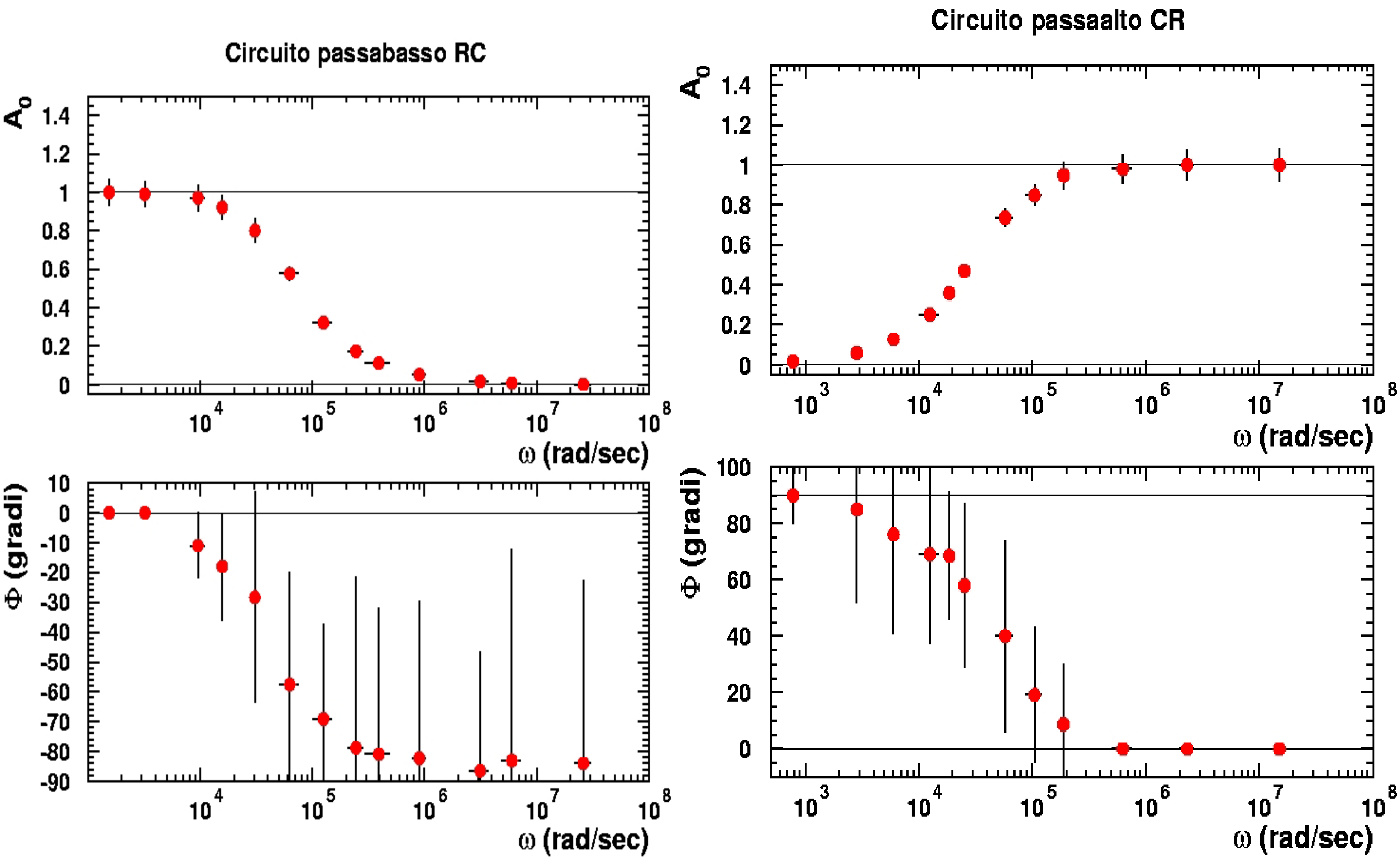
Misura della frequenza critica:

•è la frequenza (in realtà potrebbe essere un piccolo intervallo di frequenze) in cui $|\mathbf{A}| = 1/\sqrt{2}$ e $\phi = -45°$ per il passa-basso e $\phi = 45°$ per il passa-alto

•Per il passa-basso: una stima più precisa si ottiene mediante un fit lineare di $\tan\phi$ nella regione $\omega/\omega_t \sim [1/5, 5]$ ponendo $y = \tan\phi$ e $x = \omega \Rightarrow$
$y = A\,x + B$ e quindi il valore misurato è $\omega_t = -1/A$ con relativo errore del fit e $B \sim 0$

Si osservi che dalla misura di ω_t si possono ottenere C supponendo R nota e R supponendo C nota

Esperienza n. 11 Filtri passa-basso e passa-alto



Esperienza n. 11 Risposta dei filtri passa-alto e passa-basso ad un segnale onda quadra

Abbiamo verificato che se un segnale sinusoidale è applicato in ingresso ad una rete formata da elementi lineari il segnale in uscita in regime stazionario è sinusoidale $\Rightarrow$ l'azione del circuito è definita da A_0 = ampiezza segnale in uscita/ampiezza segnale in ingresso e dallo sfasamento tra di essi.

Gli altri segnali (scalino, impulso rettangolare, onda quadra, rampa, esponenziale) non conservano la loro forma attraverso una rete lineare.

Si studino la risposta del passa-basso e del passa-alto ad un segnale in ingresso del tipo onda quadra: si osservi l'eventuale distorsione della forma d'onda in uscita rispetto a quella in ingresso e si osservino le variazioni della distorsione con la frequenza. Si considerino i 3 intervalli di frequenze tali che

1) $\nu \ll \nu_t$ = 1/(2πRC) = 7.23 kHz frequenza di taglio inferiore
2) $\nu \approx \nu_t$
3) $\nu \gg \nu_t$

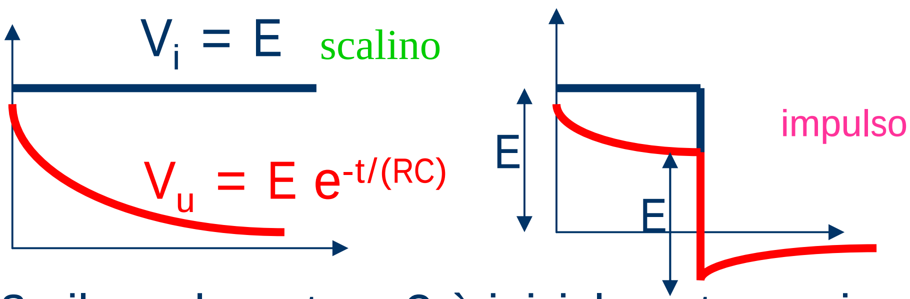
Si effettuino le stesse osservazioni aggiungendo un offset continuo al segnale in ingresso (usare la manopola offset del generatore di forme d'onda e spostare su DC l'apposito tasto dell'oscilloscopio per ciascun canale)

Si trascrivano le proprie osservazioni che verranno approfondite alla luce delle prossime lezioni.

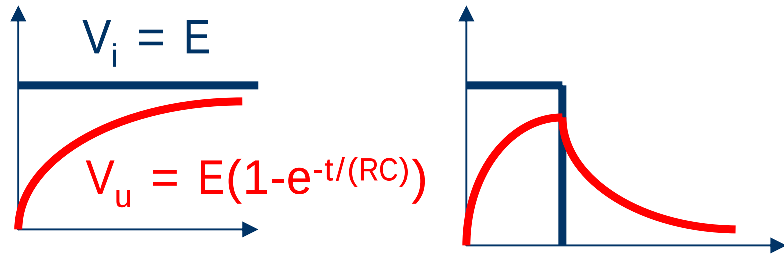
Esperienza n. 11 Risposta dei filtri passa-alto e passa-basso ad un segnale onda quadra

La risposta di passa-alto e passa-basso ad un'onda quadra può essere meglio capita se si considerano segnali di ingresso a scalino e a impulso.

Passa-alto



Passa-basso



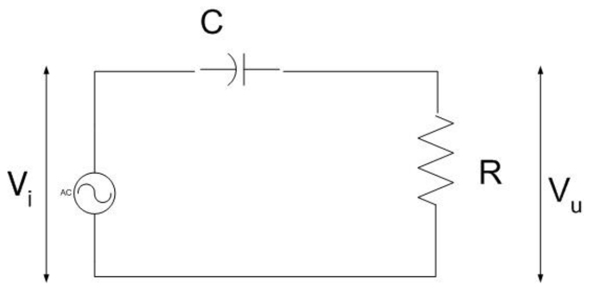
Se il condensatore C è inizialmente scarico, poiché la tensione ai suoi capi non può cambiare istantaneamente, quando l'ingresso sale al valore E improvvisamente, l'uscita cambia in modo discontinuo dello stesso valore. Per $t \to \infty$ l'uscita deve essere nulla perché C non lascia passare una corrente continua. Per l'impulso, dopo la decrescita esponenziale, l'uscita diminuisce istantaneamente della stessa quantità dell'ingresso perché la tensione sulla capacità non può variare istantaneamente. Quindi la tensione in uscita diviene negativa e tende esponenzialmente a zero. Le aree al di sopra e al di sotto dell'asse sono uguali.

Anche per il passa-basso, la risposta allo scalino è un esponenziale con costante di tempo RC. Poiché la tensione non varia istantaneamente su C, V_u parte da zero e tende al valore di regime E.
Durante l'impulso, si accumula carica su C che non può sparire istantaneamente, quindi V_u decresce esponenzialmente.

Esperienza n. 11 Risposta dei filtri passa-alto e passa-basso ad un segnale onda quadra

Risposta del passa-alto ad un'onda quadra

Un'onda quadra assume un valore costante nel tempo T_1 ed un diverso valore costante nel tempo T_2. E' un segnale periodico di periodo T_1+T_2 (talvolta se $T_1 \neq T_2$ è chiamata onda rettangolare)



Caratteristiche della risposta del passa-alto:

1. il valore medio del segnale di uscita è nullo

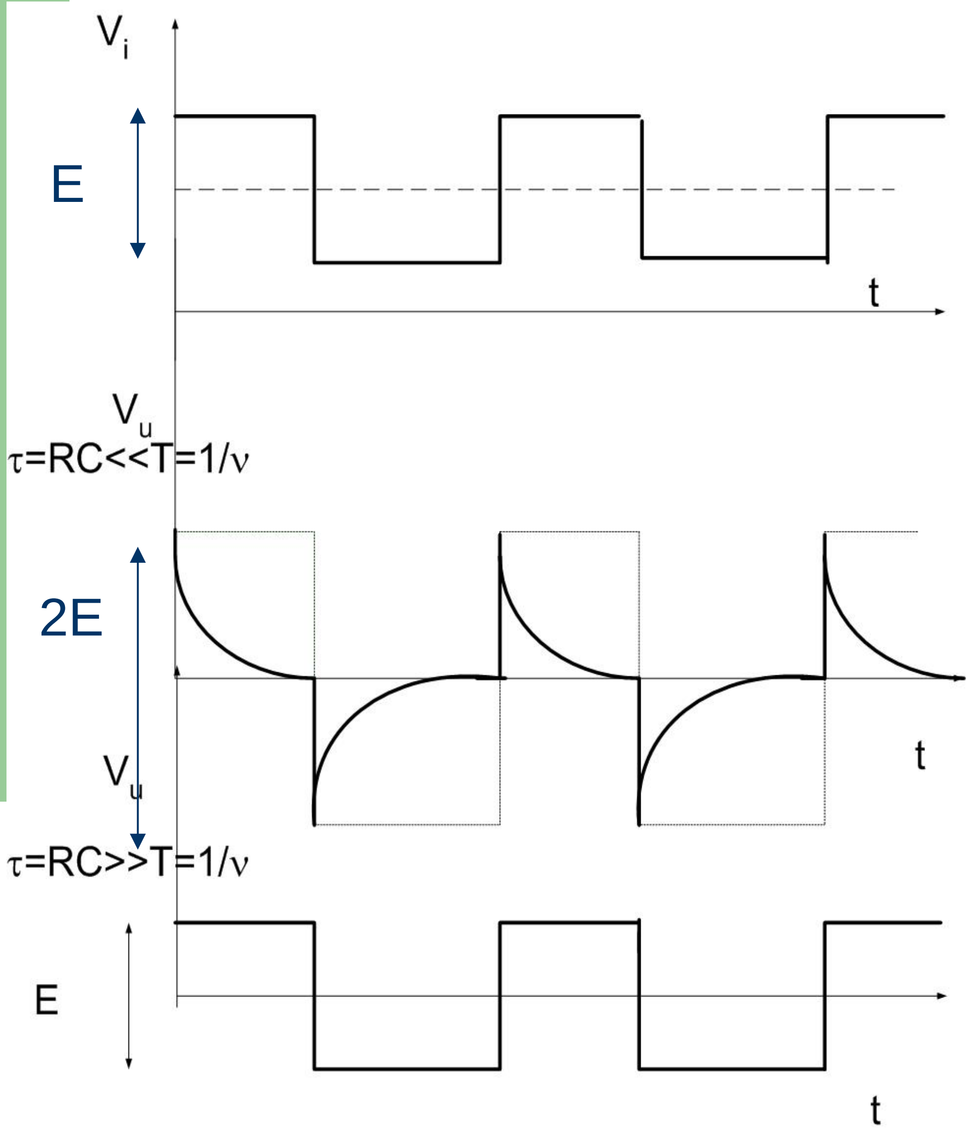
(il segnale in uscita avrà la stessa area nella regione positiva e in quella negativa delle tensioni). L'uguaglianza delle aree è dovuta al fatto che ingresso ed uscita sono separati da un condensatore è quindi, indipendentemente dal livello di tensione continua dell'ingresso, il livello medio di tensione continua dell'uscita deve essere nullo.

2. Se l'ingresso cambia in modo discontinuo di un certo valore, l'uscita presenta una discontinuità dello stesso valore e segno perché la tensione sul condensatore non può variare istantaneamente.

3. Durante ogni intervallo di tempo in cui l'ingresso si mantiene costante, l'uscita va esponenzialmente a zero. Inoltre il termine di offset continuo in ingresso non viene trasmesso in uscita. Questa è una conseguenza della presenza del condensatore che blocca la continua ($Z_C = 1/(j\omega C) \rightarrow \infty$ ovvero il condensatore equivale a un circuito aperto per $\omega \rightarrow 0$)

Esperienza n. 11 Risposta dei filtri passa-alto e passa-basso ad un segnale onda quadra

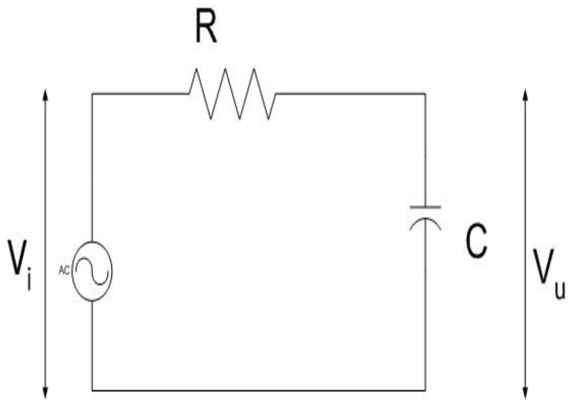
Risposta del passa-alto ad onda quadra



Peaking: se RC/T_1 e RC/T_2 <<1 l'uscita è costituita da picchi positivi e negativi e l'ampiezza picco-picco è 2 volte l'ampiezza picco-picco del segnale in ingresso. Per RC<<T il circuito si comporta come differenziatore. La caduta di tensione si localizza prevalentemente su C e V_u =Ri = $RCdV_i/dt$. La derivata di un'onda quadra è nulla ovunque tranne che nei punti di discontinuità, dove l'uscita dovrebbe presentare picchi infiniti. Essi non lo sono nella realtà perché in corrispondenza delle discontinuità la caduta di tensione su R non è trascurabile rispetto a quella su C.

La forma d'onda d'uscita riproduce quella in ingresso se RC/T_1 e RC/T_2 >>1 ma in caso l'ingresso presenti un livello di continua esso scompare in uscita

1. Esperienza n. 11 Risposta dei filtri passa-alto e passa-basso ad un segnale onda quadra



Risposta del passa-basso ad un'onda quadra

Caratteristiche della risposta del passa-basso:

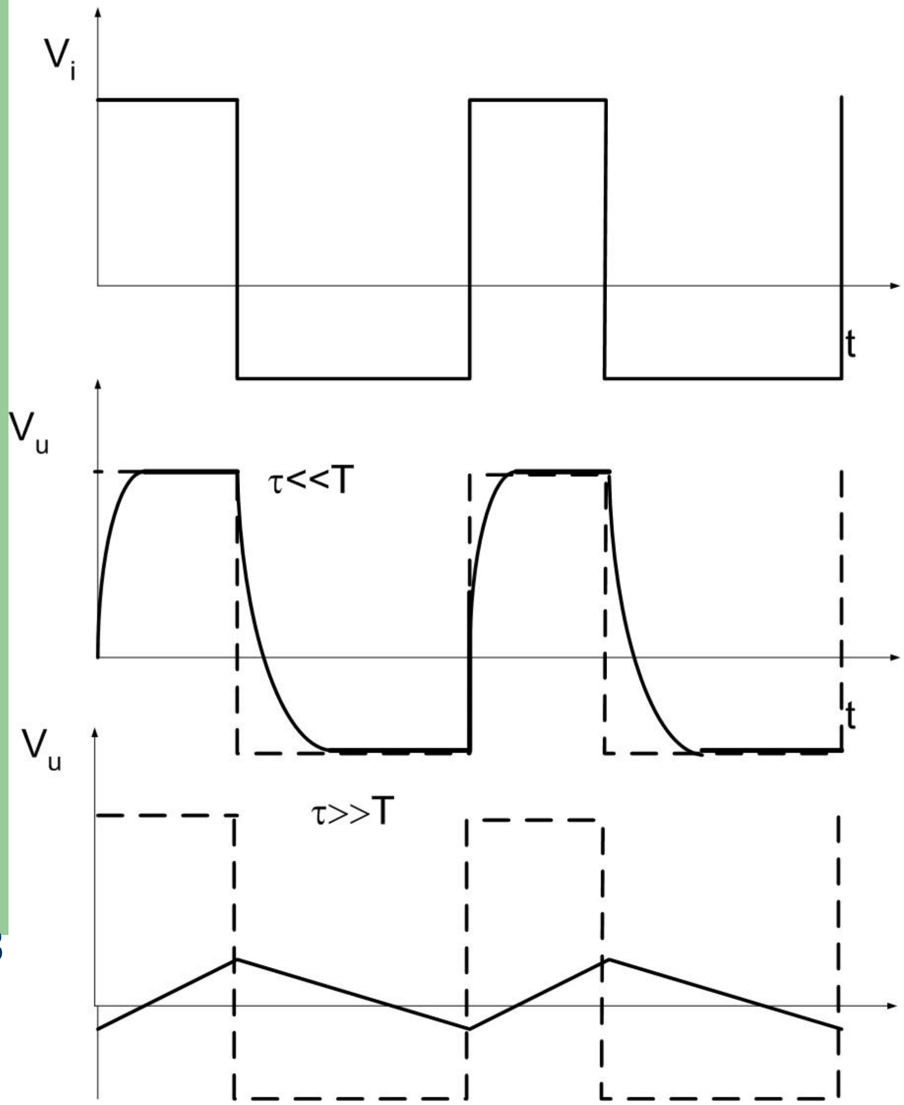
1. la distorsione del segnale di ingresso è minimizzata se $RC \ll T_1, T_2$

2. Se l'onda quadra in ingresso ha valor medio diverso da zero occorre sommare tale tensione continua anche al segnale in uscita.

3. Se $RC \gg T_1, T_2$ il circuito si comporta come un integratore: la tensione ai capi di C è molto piccola rispetto a quella ai capi di R e la corrente è praticamente determinata solo dalla resistenza $i \approx V_i/R$ e
$V_u = V_C \approx q/C = \int i\,dt/C = \int V_i dt\,/(RC)$ l'uscita è proporzionale all'integrale dell'ingresso.

Per l'onda quadra, l'integrale di una costante è una funzione lineare in accordo con quanto si osserva per $RC \gg T$

Esperienza n. 11 Risposta dei filtri passa-alto e passa-basso ad un segnale onda quadra



Livello medio nullo sia per l’ingresso che per l’uscita.

Se in ingresso si aggiunge un livello di offset continuo questo viene trasmesso inalterato in uscita e si somma al segnale alternato.

Per RC>>T i tratti costanti dell’onda quadra vengono ‘integrati’ e diventano in uscita termini lineari