

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Richiami di ottica geometrica:

Sistema diottrico: successione di mezzi omogenei, diversamente rifrangenti, in genere delimitati da superfici sferiche

Centrato: i centri di curvatura giacciono sull'asse ottico

Condizioni di parassialità (in cui supporremo di essere durante l'esperienza):

- 1) raggi formano angoli piccoli con l'asse ottico
- 2) raggi incidenti su superficie del sistema diottrico a piccole distanze dall'asse ottico

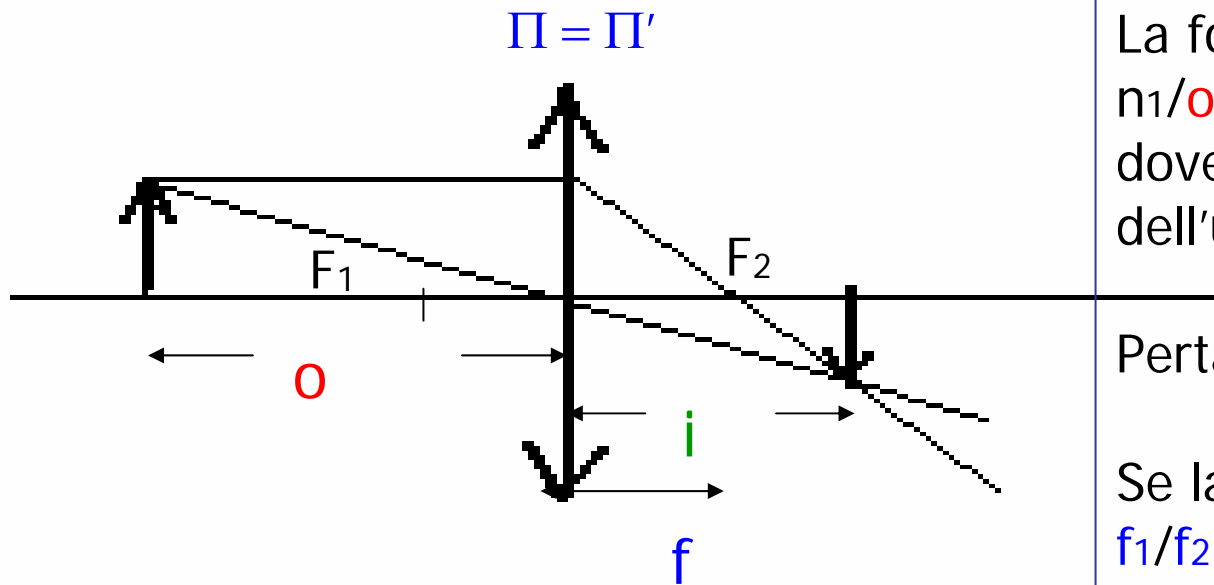
Lente sottile: lo spessore è trascurabile rispetto ai raggi di curvatura delle superfici diottriche che la costituiscono. I **piani principali** (coppie di piani coniugati tali che l'ingrandimento trasversale = 1) coincidono e passano per il **centro ottico** (punto all'interno della lente tale che un raggio attraverso esso non è deflesso)

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Lente sottile posta in un unico mezzo (per es. aria): vale l'equazione di Gauss o legge dei punti coniugati nella forma

$$1/o + 1/i = 1/f$$

o = distanza oggetto dal piano principale
 i = distanza immagine dal piano principale



La forma generale è:
 $n_1/o + n_u/i = n_1/f_1 = n_u/f_2$
dove n_u = indice di rifrazione dell'ultimo mezzo

Pertanto $f_1/f_2 = n_1/n_u \neq 1$

Se la lente è in un unico mezzo
 $f_1/f_2 = 1$

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

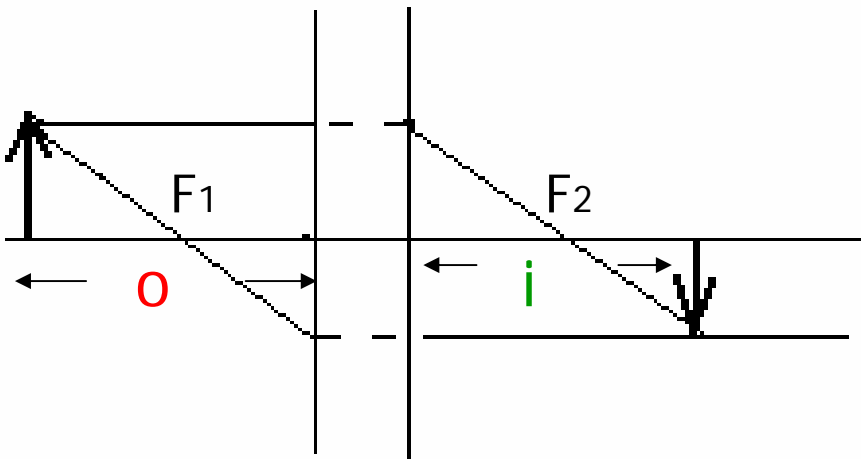
Sistema diottrico centrato in un unico mezzo (lente spessa o sistema composto di lenti sottili): esistono 2 **piani principali** distinti tali che, rispetto ad essi, continua a valere l'equazione di Gauss o legge dei punti coniugati nella forma

$$1/o + 1/i = 1/f$$

o = distanza oggetto dal piano principale Π_1

i = distanza immagine dal piano principale Π_2

Π_1 Π_2 piani principali



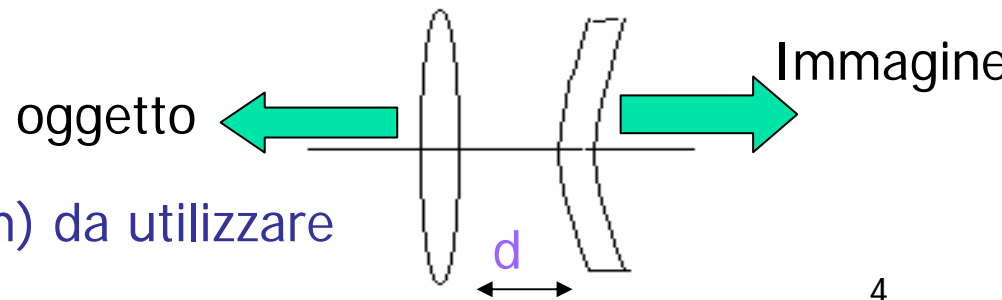
$$F_1 = o \text{ con } i = \infty$$

$$F_2 = i \text{ con } o = \infty$$

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Strumentazione:

- **Banco ottico:** consente di allineare tra loro vari componenti ottici e di variarne la mutua distanza senza alterare l'allineamento
E' costituito da un regolo graduato: barra a sezione trapezoidale con scala graduata (sensibilità 1 mm) della lunghezza di circa 1.20 m su cui scorrono 3 supporti sui cui cavalieri muniti di indice sono collocati:
 - **proiettore** costituito da una lampada a incandescenza con lente condensatrice con mascherine a sagoma variabile (**oggetto** aghiforme o fenditura)
 - **portalenti con sistema convergente** costituito da 2 lenti sottili (biconvessa + menisco divergente) separate da d (piccola)
 - **schermo** rivestito di carta mm su cui si raccolgono le **immagini reali** dell'oggetto

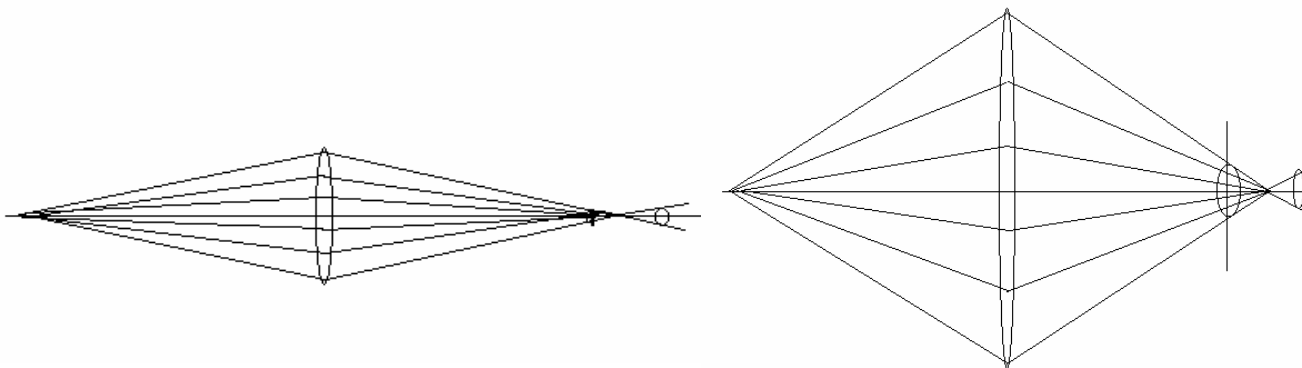


- calibro decimale (sensibilità 0.1 mm) da utilizzare per il metodo di Abbe

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

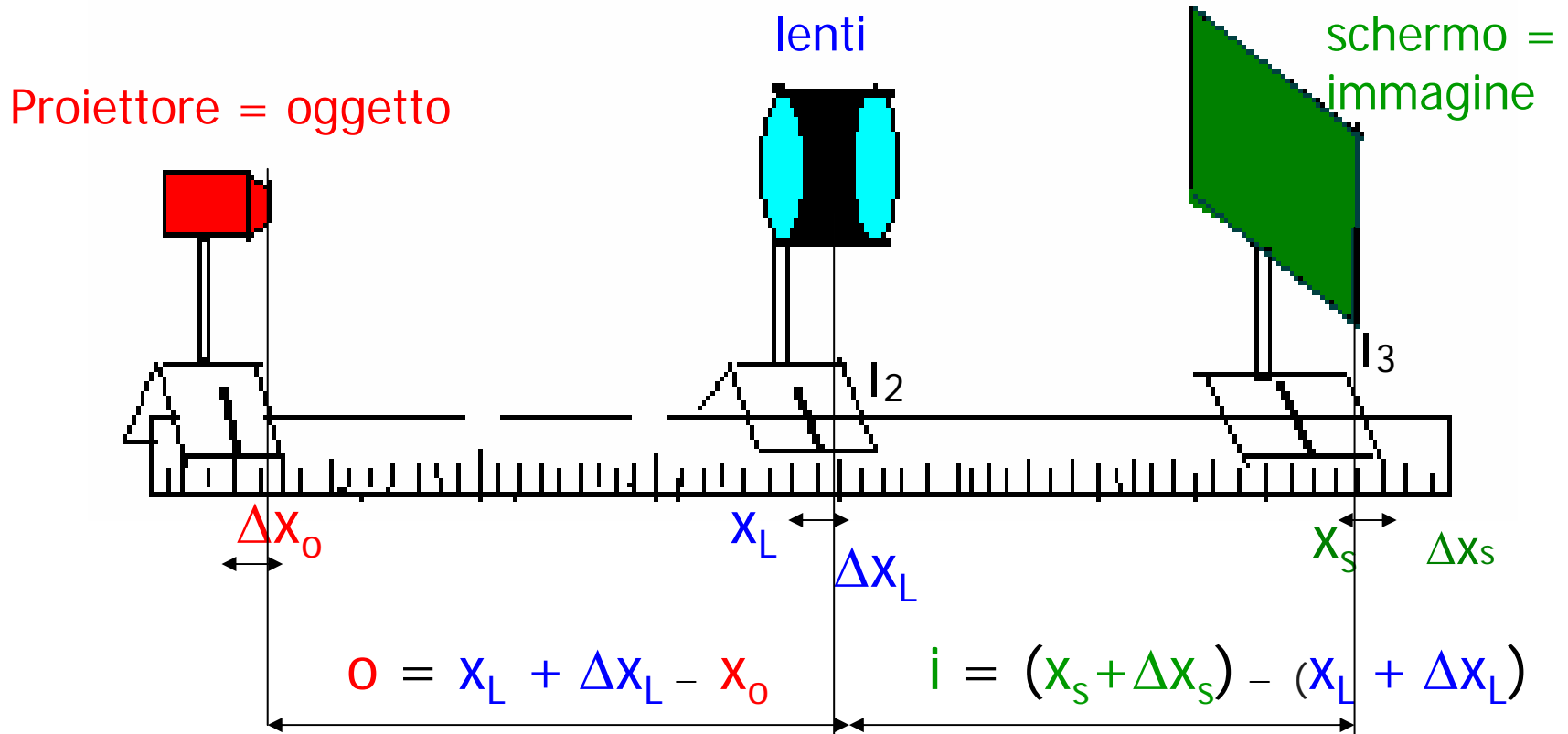
Attenzione:

- l'indice I_1 relativo al proiettore non è allineato con posizione dell'oggetto (valutare la correzione Δx_o da applicare nella misura di x_o)
- l'indice I_2 relativo al portalenti non è allineato col centro geometrico del sistema diottrico (valutare la correzione Δx_L da applicare nella misura di x_L)
- la posizione del piano dello schermo può non essere allineata con l'indice (valutare la correzione Δx_s da applicare nella misura di x_s – in alcuni banchi ottici è trascurabile)
- **intervallo di nitidezza:** a causa del piccolo diametro delle lenti l'immagine sullo schermo può apparire a fuoco in un intervallo (non in un'unica posizione). Tale intervallo è più ampio se o non è molto maggiore di f



Quando il diametro della lente è grande l'intervallo di massima nitidezza è più piccolo per via della maggiore divergenza dei raggi rispetto a lenti di piccolo diametro

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe



x_o = posizione oggetto diversa da posizione I_1 della quantità Δx_o in figura (aiutarsi con una riga)

$x_L + \Delta x_L$ = posizione del presunto centro ottico

x_s in molti banchi coincide con posizione di I_3

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo dei punti coniugati: $1/o + 1/i = 1/f \Rightarrow$ $f = oi / (o + i)$

- Fissare l'oggetto all'estremità sinistra del regolo e annotare l'ascissa x_o facendo riferimento all'indice I_1 e correggere x_o rispetto all'indice I_1 (Δx_o)
- Posizionare il portamenti e annotare il valore dell'ascissa x_L facendo riferimento all'indice I_2 e correggendola per Δx_L per via del non allineamento tra I_2 e il centro geometrico del sistema di lenti (assunto coincidente col centro ottico)
- Muovere lo schermo all'estremità opposta per trovare la posizione che fornisce sullo schermo l'immagine reale a fuoco annotando il valore dell'ascissa x_s facendo riferimento all'indice I_3 e correggendo x_s per via del non allineamento con l'indice I_3 (Δx_s)



$o = x_L - x_o =$ distanza tra oggetto e centro geometrico del portamenti

$i = x_s - x_L =$ distanza tra centro geometrico del portamenti e schermo

dove le ascisse sono corrette per i rispettivi Δx

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo dei punti coniugati

$X_o \pm \Delta X_o$ (cm)	$X_L \pm \Delta X_L$ (cm)	$O = X_L - X_o$ (cm)	$\sigma(O)$ (cm)	$X_s \pm \Delta X_s$ (cm)	$i = X_s - X_L$ (cm)	$\sigma(i)$ (cm)	$f = oi / (o + i)$ (cm)	$\sigma(f)$ cm

• errore su x differenza di **2 letture con $\sigma = 1$ mm e tiene conto di correzioni Δx**

• errore su f_k :
$$\sigma(f_k) = \sqrt{\left(\frac{\partial f_k}{\partial O}\right)^2 \sigma(O)^2 + \left(\frac{\partial f_k}{\partial i}\right)^2 \sigma(i)^2}$$

• **intervallo di nitidezza**: quando l'immagine è nitida sullo schermo nell'intervallo tra X_{s1} e $X_{s2} \Rightarrow X_s = (X_{s1} + X_{s2})/2$ e l'errore deve tener conto della media effettuata oppure si può considerare come errore $X_{s2} - X_{s1}$

• si calcoli la media pesata di f:

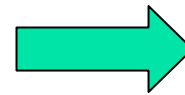
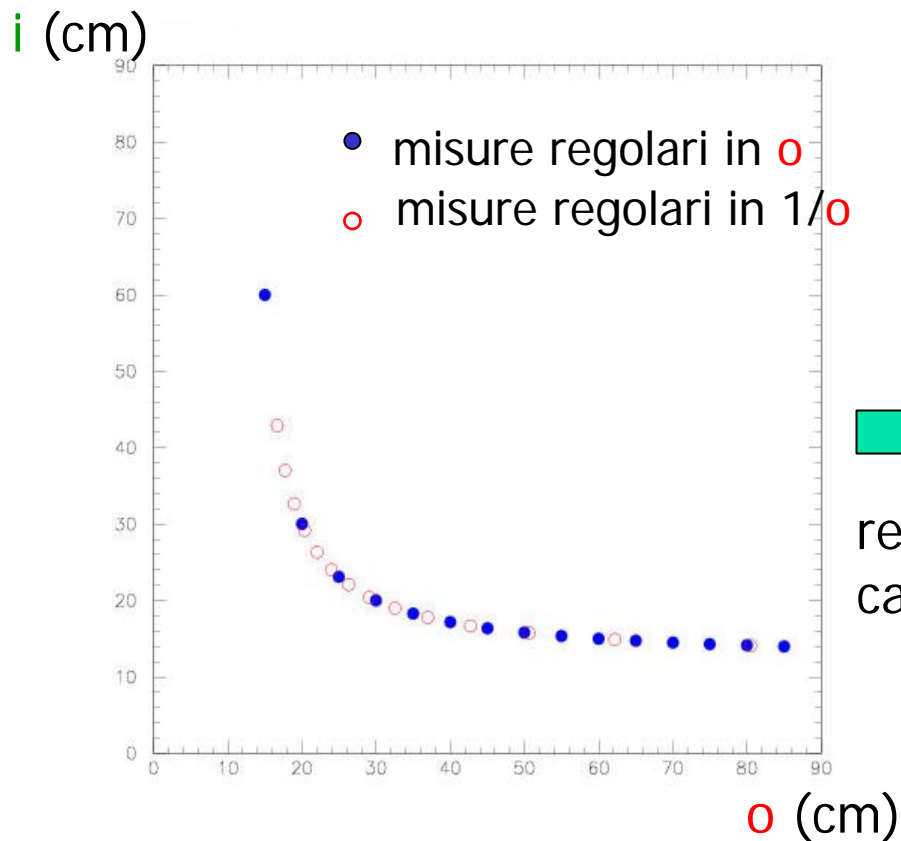
$$\langle f \rangle = \frac{\sum_k w_k f_k}{\sum_k w_k} \quad \text{e} \quad \sigma(\langle f \rangle) = \sqrt{\frac{1}{\sum_k w_k}} \quad \text{con } w_k = 1/\sigma^2(f_k)$$

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

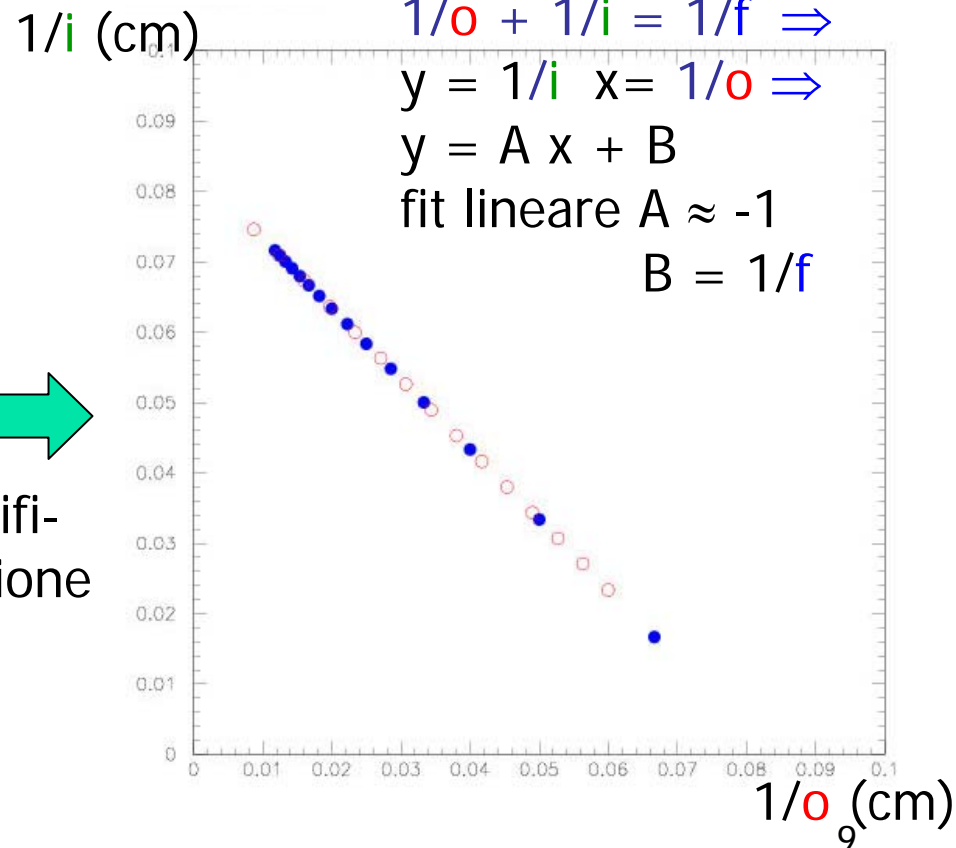
Metodo dei punti coniugati: esempio con $f = 12 \text{ cm}$

misure regolari in o : $o = 15-85 \text{ cm}$ in intervalli di 5 cm

misure regolari in $1/o$: $1/o = 0.01-0.06 \text{ cm}^{-1}$ in intervalli di 0.004 cm^{-1}

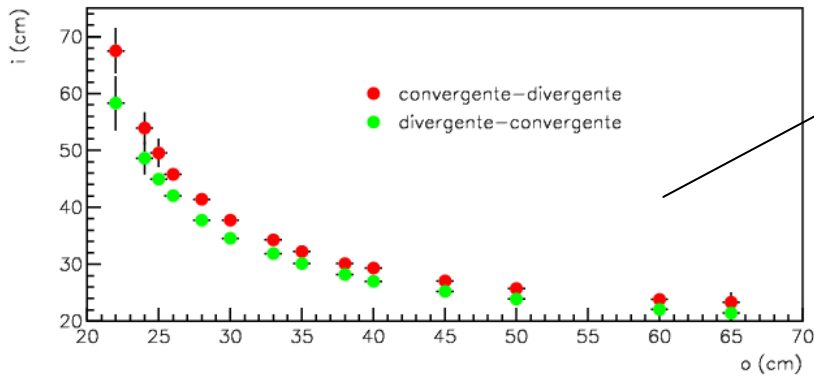


rettifi-
cazione



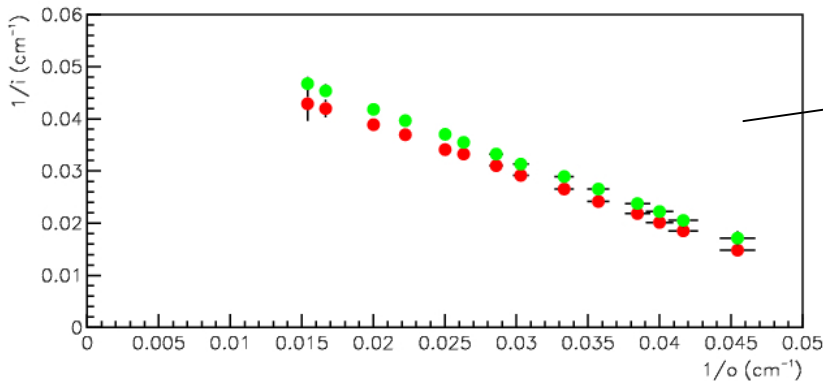
Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo dei punti coniugati



iperbole

L'esperienza è stata condotta invertendo il sistema di lenti: La differenza tra le 2 misure non è dovuta all'errore statistico ma all'ignoranza sulla posizione dei piani principali e quindi all'assunzione di un presunto centro ottico



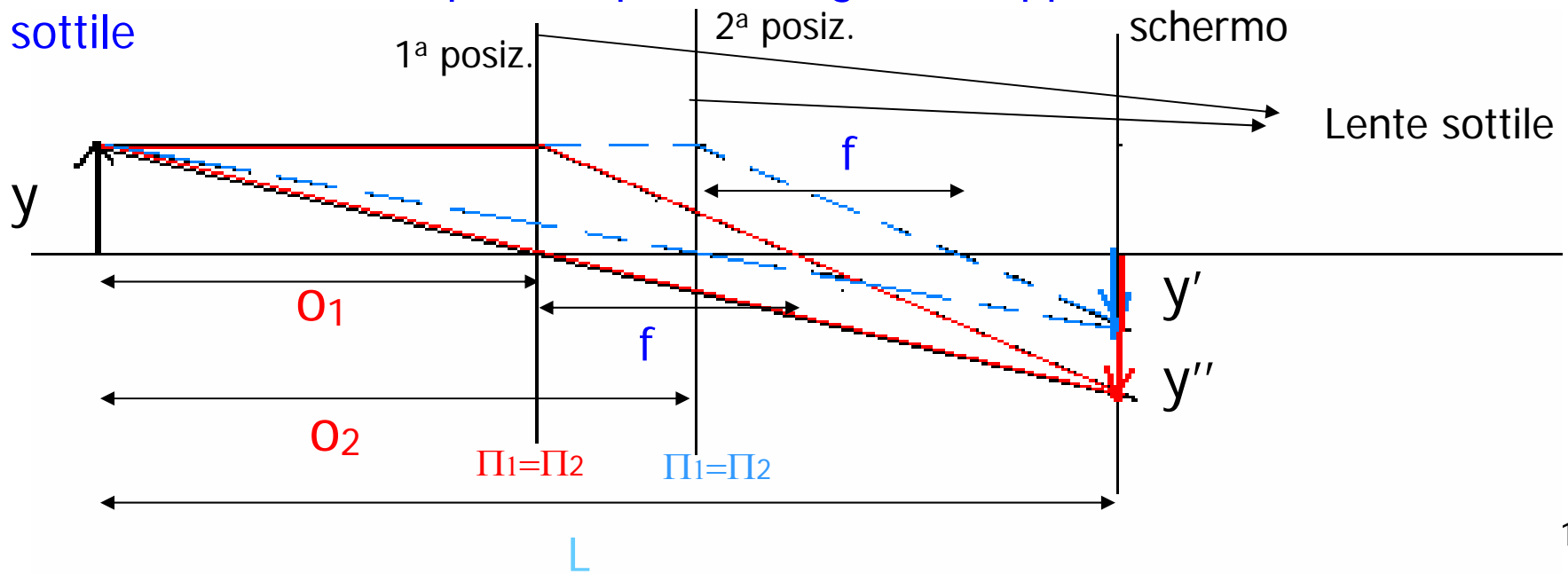
rettificazione \Rightarrow fit lineare
 $y = Ax + B$ con $A \approx -1$
e $f = 1/B$ col suo errore

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo di Bessel: Non richiede la conoscenza dei piani principali. E' però valido nell'approssimazione che la distanza dei piani principali sia piccola rispetto a quella oggetto-schermo. Sfrutta la proprietà di reciprocità dei raggi luminosi: dato l'oggetto e fissato lo schermo **esistono sotto opportune condizioni 2 possibili posizioni della lente che danno l'immagine a fuoco**

L = distanza oggetto - schermo

Nel nostro caso il sistema è costituito da 2 lenti e quindi ha 2 piani principali distinti (Π_1 e Π_2) ma per semplicità in figura è rappresentato come 1 lente sottile




Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

$L = \text{distanza oggetto - schermo} = o + i$ (trascurando la distanza d tra i piani principali. Infatti in realtà $o + i = L - d$)

$$i = L - o$$

$$1/o + 1/i = 1/f \Rightarrow i = of / (o - f)$$

$$Lo - Lf - o^2 + of = of \Rightarrow o^2 - Lo + Lf = 0$$

$$o_{1/2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4Lf}}{2}$$


- $\Delta = L^2 - 4Lf > 0 \Rightarrow 2$ soluzioni reali distinte per $L > 4f$
2 posizioni per cui si ottiene immagine nitida su schermo
- $\Delta = 0 \Rightarrow 2$ soluzioni coincidenti
- $\Delta < 0 \Rightarrow 2$ soluzioni immaginarie (mai immagine reale su schermo)

$$a = o_2 - o_1 = \sqrt{L^2 - 4Lf} \Rightarrow a^2 = L^2 - 4Lf \Rightarrow \boxed{f = (L^2 - a^2) / 4L}$$

N.B. $a = o_2 - o_1 = x''_{\Pi_1} - x'_{\Pi_1} = x''_L - x'_L$

non richiede la conoscenza della posizione di Π_1

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo di Bessel:

- Fissare oggetto ad estremità sinistra del regolo e annotare l'ascissa x_0 facendo riferimento all'indice I_1 e correggere x_0 rispetto all'indice I_1 (Δx_0)
- Posizionare schermo a distanza $> 4f$ e annotare ascissa x_s con riferimento all'indice I_3 e correggere x_s rispetto all'indice I_3 (Δx_s)
- Spostare portamenti cercando le 2 posizioni in cui immagini nitide su schermo di oggetto e annotare ascisse x'_L e x''_L con riferimento a indice I_2
- Si ottiene: $a = x'_L - x''_L$ e $L = x_s - x_0 \Rightarrow f = (L^2 - a^2) / 4L$

N.B. non è necessario correggere per non allineamento tra I_2 e centro geometrico del sistema di lenti Δx_L nella misura di x'_L e x''_L perché se ne fa la differenza

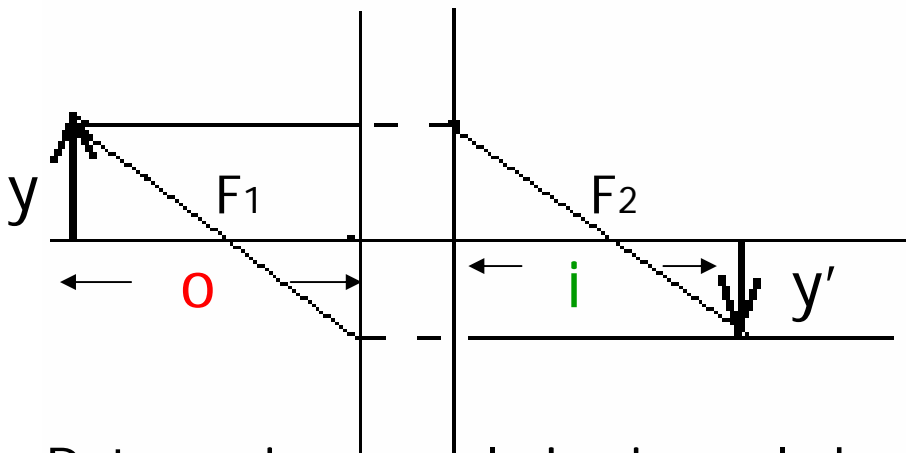
$x_0 \pm \Delta x_0$ (cm)	$x_s \pm \Delta x_s$ (cm)	$L = x_s - x_0$ (cm)	$\sigma(L)$ (cm)	x'_L (cm)	x''_L (cm)	$a = x''_L - x'_L$ (cm)	$\sigma(a)$ (cm)	$f =$ $(L^2 - a^2) / 4L$ (cm)	$\sigma(f)$ cm

errore su f_k :
$$\sqrt{\left(\frac{\partial f_k}{\partial a}\right)^2 \sigma(a)^2 + \left(\frac{\partial f_k}{\partial L}\right)^2 \sigma(L)^2} \Rightarrow \text{media pesata di } f_k$$

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo di Abbe (utilizza ingrandimento): in teoria più preciso non essendo necessaria né la conoscenza della posizione dei piani principali né l'approssimazione $d \ll L$, in pratica perde precisione nella misura delle dimensioni trasverse oggetto y e immagine y' (meglio se col calibro)

Π_1 Π_2 piani principali



Ingrandimento:

$$|m| = y'/y = f / (o - f)$$

$$\Rightarrow m (o - f) = f$$

$$\Rightarrow m o = m f + f$$

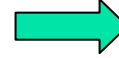
$$\Rightarrow o = f + f/m$$

Date n misure per la j-esima e la k-esima:

$$\left. \begin{aligned} o_j &= f + f/m_j \\ o_k &= f + f/m_k \end{aligned} \right\}$$



$$o_k - o_j = f/m_k - f/m_j$$



$$f = (o_k - o_j) / (1/m_k - 1/m_j)$$

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo di Abbe:

- Misurare le dimensioni trasversali dell'oggetto y col calibro
- Fissare oggetto ad estremità sinistra del regolo
- Posizionare il **portanti** ad una distanza dall'oggetto maggiore di f e annotarne l'ascissa x'_L con riferimento all'indice I_2
- Spostare lo schermo fino ad ottenere l'immagine a fuoco
- Misurare sullo schermo le dimensioni trasversali y' dell'immagine a fuoco e calcolare l'ingrandimento $m = |y'|/y$
- Spostare il **portanti** e annotare l'ascissa x''_L con riferimento all'indice I_2
- Spostare lo schermo fino ad ottenere l'immagine a fuoco
- Misurare sullo schermo le dimensioni trasversali y' dell'immagine a fuoco e calcolare l'ingrandimento $m = |y'|/y$
- Calcolare $f = (x''_L - x'_L)/(1/m'' - 1/m')$

Iterare questa procedura e calcolare media pesata di f per le possibili coppie

N.B. potete scegliere di misurare y e y' insieme ad o e i per il metodo dei punti coniugati

Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Metodo di Abbe:

$x_{Lj} \pm \Delta x_{Lj}$ (cm)	$\sigma(x_{Lj})$ (cm)	y (cm)	$\sigma(y)$ (cm)	y_j' (cm)	$\sigma(y_j')$ (cm)	$m_j = y_j'/y$
$x_{Lk} \pm \Delta x_{Lk}$ (cm)	$\sigma(x_{Lk})$ (cm)	y (cm)	$\sigma(y)$ (cm)	y_k' (cm)	$\sigma(y_k')$ (cm)	$m_k = y_k'/y$


Per ogni coppia di misure:

$$f_{jk} = (x_{Lk} - x_{Lj}) / (1/m_k - 1/m_j) = x_{jk} / (1/m_k - 1/m_j)$$

con $y, y' > 0$

- errore su f_{jk} : $\sigma(f_{jk}) = \sqrt{\left(\frac{\partial f_{jk}}{\partial x_{jk}}\right)^2 \sigma^2(x_{jk}) + \left(\frac{\partial f_{jk}}{\partial m_k}\right)^2 \sigma^2(m_k) + \left(\frac{\partial f_{jk}}{\partial m_j}\right)^2 \sigma^2(m_j)}$

- media pesata di f_{jk}



Esperienza n. 3 Misura della distanza focale di un sistema diottrico centrato mediante verifica della legge dei punti coniugati e con i metodi di Bessel e di Abbe

Considerazioni comparative sulla precisione dei 3 metodi utilizzati:

- Il **metodo dei punti coniugati** è concettualmente il più impreciso in quanto siamo costretti ad applicare l'equazione delle lenti utilizzando le distanze dell'oggetto e dell'immagine da un ipotetico **centro ottico** (come se il sistema ottico fosse una lente sottile) anziché dai piani principali, non determinabili con l'apparato a disposizione
- Il **metodo di Bessel** è indipendente dalle posizioni dei piani principali, sebbene valido nell'ipotesi che si possa **trascurare la distanza tra i piani principali rispetto alla distanza oggetto-schermo**. La limitazione maggiore alla sua precisione è però dovuta alle dimensioni del regolo che ne limita il numero di misure.
- Il **metodo di Abbe** è in linea di principio il più preciso perché **non richiede né la conoscenza della posizione dei piani principali** né alcuna approssimazione, ma è di fatto pesantemente penalizzato dall'errore di misura delle dimensioni trasversali di oggetto ed immagine

Il fatto che l'immagine viene vista a fuoco nell'intervallo di nitidezza limita la precisione del risultato per tutti i metodi usati