Esperienza n. 5 Misura di resistenze col metodo del ponte di Wheatstone

Il ponte di Wheatstone è utilizzato per la misura di resistenze con elevata precisione; è adeguato per misure di R nell'intervallo 10-10^5 Ω

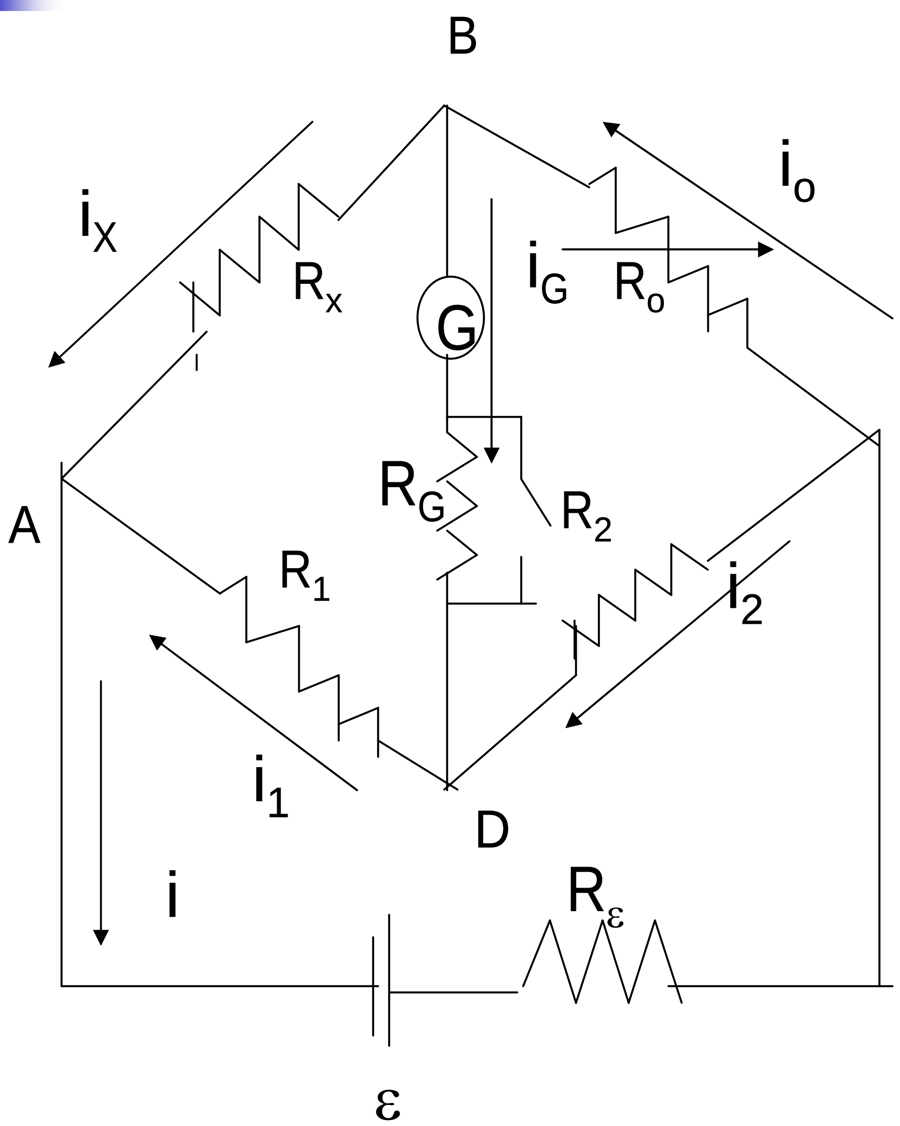
Strumentazione:

- Generatore di f.e.m. in corrente continua
- Tester digitale
- Cassetta di resistenze variabili tra 0.1 Ω e 9999.9 Ω,regolabile con 5 manopole
- 2 resistenze da 200 Ω con tolleranza 1%
- 1 resistenza da 100 Ω con tolleranza 1%
- 1 resistenza da 20 Ω con tolleranza 1%
- 2 resistenze di valore nominale 120 Ω $\pm$5% e 18 $\pm$5% kΩ di cui si deve determinare il valore effettivo

Si applicheranno 3 metodi che utilizzano il ponte di Weathstone per la misura di 2 resistenze incognite e si confronteranno i risultati:

- metodo classico;
- metodo della doppia pesata;
- metodo del confronto o di sostituzione

Metodo classico:



Variando opportunamente le resistenze R_1, R_2 e R_0 $\Rightarrow$ condizione di "ponte bilanciato": quando la corrente nel galvanometro è nulla $i_G = 0$ ovvero $V_B = V_D$

In tali condizioni:

$$\begin{cases} i_o = i_X \\ i_1 = i_2 \\ V_{AB} = V_{AD} \Rightarrow \; R_X i_X = R_1 i_1 \\ V_{BC} = V_{CD} \Rightarrow R_o i_o = R_2 i_2 \end{cases}$$

$$R_X = (R_1/R_2)\, R_0$$

$R_X = (R_1/R_2)\ R_0$

Conviene fissare il rapporto R_1/R_2 e variare R_0 (cassetta di resistenze) per ricercare la condizione di bilanciamento del ponte.

La scelta del valore di R_1/R_2 è determinata dal valore della resistenza incognita R_X, dall'intervallo di variabilità di R_0 e dalla sensibilità che si vuole ottenere nella misura

Errore relativo e precisione del metodo:

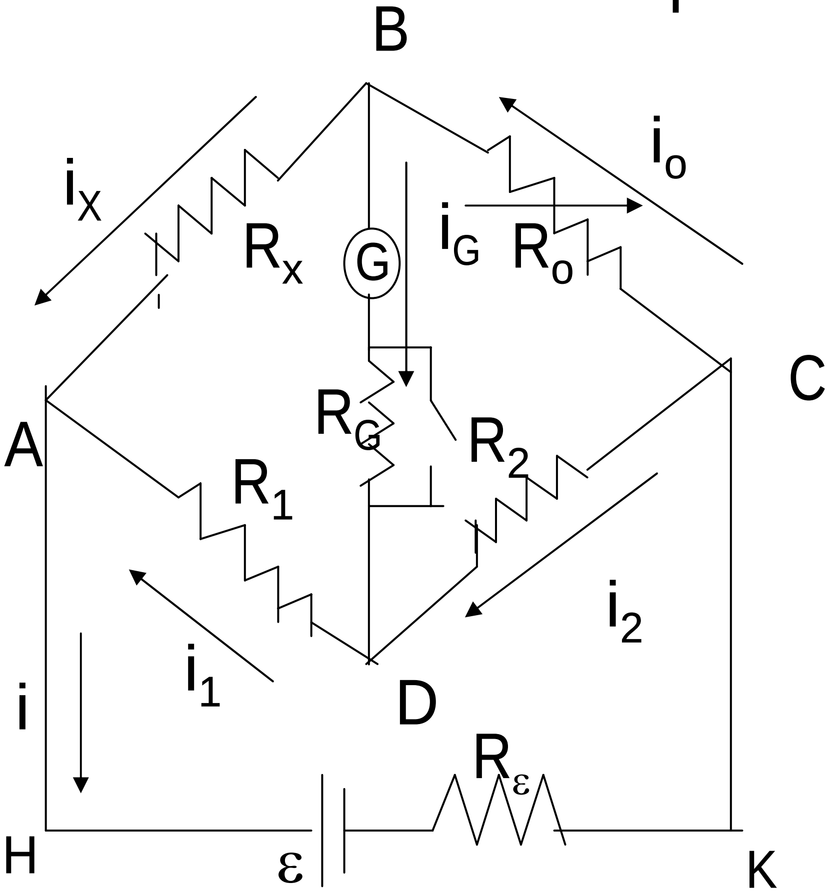
$\ln R_X = \ln R_1 - \ln R_2 + \ln R_0 \Rightarrow$ $$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{\Delta R_1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_0}{R_0}$$

La miglior stima dell'errore relativo su R_X è

$$\varepsilon_X = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_0^2 + \varepsilon_P^2}$$

dove ε_P è l'errore sul bilanciamento del ponte che dipende dalla sensibilità del tester

Per stimare l'errore ε_P è necessario considerare le equazioni di Kirchoff del circuito quando il sistema e' sbilanciato:



$i_0 = i_X + i_G$ Nodo B

$i = i_1 + i_X$ Nodo A

$\varepsilon = R_1 i_1 + R_\varepsilon i + R_2 i_2$ Maglia AHKC

$0 = R_X i_X - R_1 i_1 - R_G i_G$ Maglia ABD

$0 = R_0 i_0 + R_G i_G - R_2 i_2$ Maglia BCD

$i_G = \varepsilon\,(R_X R_2 - R_0 R_1)/A$

con $A = R_G R_\varepsilon\,(R_0+R_1+R_2+R_X)+$
$+R_G(R_0+R_X)(R_1+R_2)+$
$+R_\varepsilon(R_1+R_X)(R_2+R_0)+$
$+R_1 R_2(R_X+R_0)+R_X R_0(R_1+R_2)$

i_G è massima $\Rightarrow$ se A è minimo $\Rightarrow$ ovvero se $R_G = 0$ e $R_\varepsilon = 0$

$\Rightarrow A = R_1R_2(R_X+R_0)+R_XR_0(R_1+R_2)$

Se il ponte è bilanciato: $R_X = R_1/R_2 * R_0$

$A = R_1R_2(R_1/R_2 + 1)\,R_0 + R_1/R_2 * R_0^2\,(R_1+R_2) =$

$= R_1/R_2 * R_0\,(R_1R_2 + R_2^2 + R_1R_0 + R_2R_0) = R_X\,(R_1+R_2)(R_0+R_2)$

Quindi in condizioni prossime all'equilibrio:

$A = B\,R_X$ con $B = (R_1+R_2)(R_0+R_2)$ e $i_G = \varepsilon*(R_XR_2 - R_0R_1)/BR_X =$

$= \varepsilon\,R_2/B - \varepsilon\,R_0R_1/BR_X$

Quindi la sensibilità del metodo è:

$$\frac{di_G}{dR_X} = \varepsilon\frac{R_0R_1}{BR_X^2} = \frac{C\varepsilon}{R_X^2}$$

con $C = R_0R_1/\,[(R_1+R_2)(R_0+R_2)]$

Esperienza n. 5 Misura di resistenze col metodo del ponte di Wheatstone

$$\varepsilon_{R_X} = \frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{R_X}{C\varepsilon}\Delta i_G$$

Minima variazione di R_x che produce sbilanciamenti del ponte

Si dimostra che la sensibilità è massima quando $R_X=R_1=R_2=R_0$ $\Rightarrow C=1/4 \Rightarrow$ l'errore relativo su R_X è $\varepsilon(R_X)=4R_X/\varepsilon * \Delta(i_G)$

Esempio: R_X = 100 Ω, ε = 10 V e $\Delta i_G = 10^{-7}$ A e C = 1/4 ⇒ $\varepsilon(R_X) = 4 \cdot 10^{-6}$

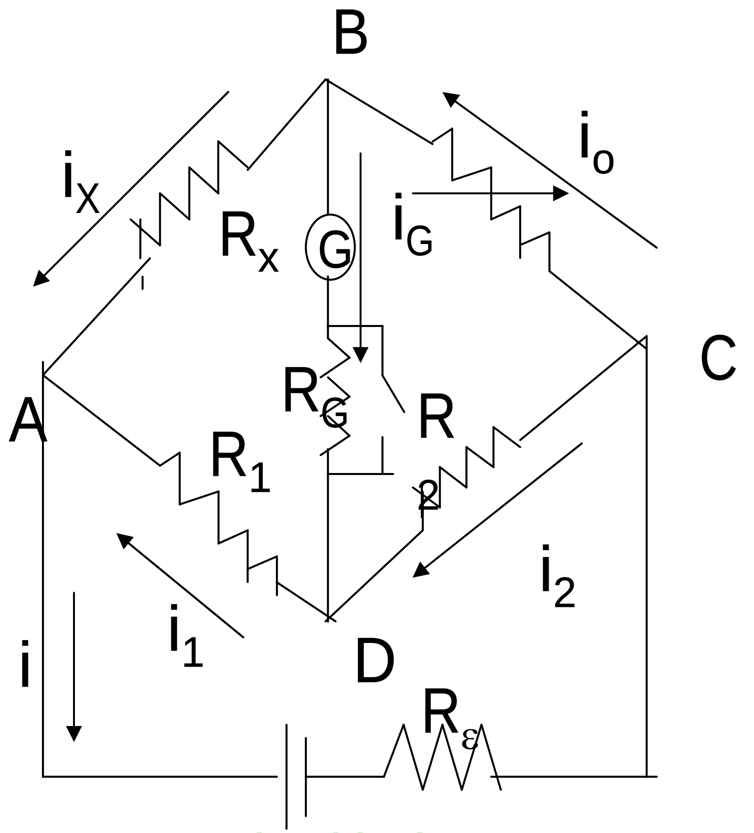
Nel nostro caso, i 3 metodi sono limitati dalla sensibilità del tester digitale che è 0.1 μA per f.s. 200 μA. L'errore su R_X nel metodo classico dipende principalmente dalle tolleranze di R_1, R_2 e R_0

Se R_X è compreso nell'intervallo di valori che può assumere la cassetta delle resistenze conviene scegliere $R_1 = R_2$ per massimizzare la sensibilità del circuito

Per misurare resistenze di valore superiore a 9999.9 Ω si scelgono R_1 e R_2 in modo che $R_1/R_2 > 1$

Metodo classico in pratica:

•si realizza il circuito in figura sostituendo al galvanometro un multimetro digitale adoperato inizialmente in modalità di voltmetro (elevata resistenza di ingresso = 10 MΩ) cosicché è possibile evitare di utilizzare la resistenza di protezione R_G senza rischiare di danneggiarlo



•fissato il valore della tensione di alimentazione ε, si diminuisce R_0 a partire dal suo valore massimo agendo sulle manopole della cassetta di resistenze, fino a raggiungere la condizione di ponte bilanciato ($V_{multimetro}$ = 0)

La regolazione della cassetta si effettua mediante 5 manopole ciascuna corrispondente a una posizione decimale del valore della resistenza.

Errore di lettura della resistenza della cassetta = 0.1 Ω, ma si utilizzi 0.2Ω (in quanto un po' usurate)

Esperienza n. 5 Misura di resistenze col metodo del ponte di Wheatstone

•Al fine di aumentare la sensibilità dello strumento (senza rischiare di danneggiarlo in quanto la corrente che percorre lo strumento è piccola una volta bilanciato col voltmetro) si utilizza successivamente la modalità amperometro del multimetro (sensibilità di 0.1 μA per fondo scala 200 μA) al fine di verificare che la corrente nel tester è $i_G = 0$

•Si registri il valore di R_0 quando questa condizione è verificata

Utilizzare le resistenze di tolleranza 1% (2 da 200 Ω, 1 da 20 Ω) come R_1 e R_2, scegliendo il valore R_1/R_2 in base al valore presunto di R_X rispetto al massimo valore della cassetta di resistenze e cercando di massimizzare, laddove possibile, la sensibilità ($R_1 = R_2$)

Inoltre si eseguano 3 misure (solo per il metodo classico) con 3 valori delle tensioni di alimentazione (es. ε~3, 6, 9 V) almeno per la prima delle 2 resistenze da misurare

Esperienza n. 5 Misura di resistenze col metodo del ponte di Wheatstone

Tabella di dati ed errori per il metodo classico:

ε (Volt)	R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	R_0 (Ω)	R_X (Ω)	σ_0 (Ω)	σ_1 (Ω)	σ_2 (Ω)	ΔR_x (Ω)	ε_{RX}

Eseguendo la misura per diversi valori di ε si osserva che la sensibilità aumenta con ε

Si faccia la media pesata dei risultati

Metodo della doppia pesata

Il nome deriva dall'analogia con il metodo di misura di masse mediante la doppia pesata che consente di rendere la misura indipendente dalla lunghezza dei bracci della bilancia e quindi di eliminare errori sistematici legati alla loro diversa lunghezza spostando la massa da un piatto all'altro

Il metodo della doppia pesata in pratica:

- si bilancia il ponte e si annota il valore di R_0
- si scambia la posizione di R_1 con R_2
- si bilancia nuovamente il ponte annotando il valore di R'_0

Infatti: $R_X = (R_1/R_2)\, R_0$

$R_X = (R_2/R_1)\, R'_0$

$$\Rightarrow \quad R_X = \sqrt{R_0 R_0^{'}}$$

Quindi l'errore relativo è: $2\ln R_X = \ln R_0 + \ln R'_0$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{dR_X}{R_X} = \frac{dR_0}{R_0} + \frac{dR'_0}{R'_0} \Rightarrow \varepsilon_X = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 + \varepsilon_0{'}\right) + 2\varepsilon_P$$

dove $2\varepsilon_P$ deriva dall'aver bilanciato il ponte per 2 volte. L'errore su R_X è principalmente determinato dalle tolleranze di R_0 e R'_0

V (Volt)	R_0 (Ω)	R'_0 (Ω)	R_X (Ω)	σ_0 (Ω)	σ'_0 (Ω)	ΔR_X (Ω)	ε_{RX}

Metodo del confronto o di sostituzione

- Si esegue la misura di R_X col metodo classico
- Si sostituisce R_X con la resistenza di confronto R_C di valore noto e scelta dello stesso ordine di grandezza di R_X
- Si misura R_C bilanciando il ponte

$R_X = (R_1/R_2)\ R_0$

$R_C = (R_1/R_2)\ R''_0$

$$\Rightarrow \quad R_X = R_C(R_0/R''_0)$$

L'errore su R_X è principalmente determinato dalle tolleranze di R_0, R''_0 e R_C

I 3 metodi vanno impiegati solo laddove i valori delle resistenze lo rendono possibile!

V (Volt)	R_0 (Ω)	R''_0 (Ω)	R_X (Ω)	R_C (Ω)	σ_0 (Ω)	σ''_0 (Ω)	σ_C (Ω)	ΔR_x (Ω)	ε_{RX}