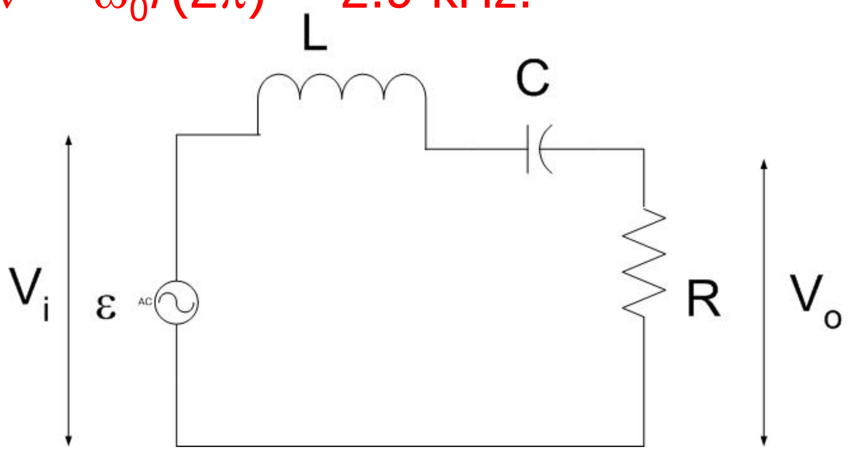
Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

Strumentazione: oscilloscopio, generatore di forme d'onda (utilizzato con onde sinusoidali), 2 sonde, basetta, componenti R,L,C

Circuito da realizzare:

- L = 2 H (±10%) con resistenza in continua di $R_L = 170\Omega$ (±10%)
- C = 1.5 nF (±10%)
- R = 2.2 kΩ / 100 kΩ
- Tensione di alimentazione picco-picco ε = 2 V (R_{int} = 600 Ω)

Valore della pulsazione per cui si attende che il circuito sia in condizioni di risonanza: $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$ = 18257.4 rad/s corrispondente a $\nu = \omega_0/(2\pi)$ = 2.9 kHz.



Intervallo di frequenze in cui realizzare le misure:
~200 Hz – ~100 kHz
campionando ad intervalli più fini la regione della risonanza

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

Misure da effettuare con l'oscilloscopio collegando i 2 canali con la ddp ai capi del generatore e quella sulla resistenza R per i 2 valori a disposizione:
(in rosso si indicano le grandezze misurate, in verde quelle calcolate)

V_i (V)	f.s. (V)	T (s)	f.s. (s)	ν (Hz)	ω (rad/s)	$\omega/\omega_0 \pm \sigma(\omega/\omega_0)$	V_o (V)	f.s. (V)	$A = V_o/V_i \pm \sigma(V/V_0)$	ΔT (s)	f.s. (s)	$\phi \pm \sigma(\phi) = 360° * \Delta T/T$ (deg)

Verificare per ogni misura il valore della tensione di ingresso (che potrebbe variare poiché si utilizza l'uscita da 600 Ω del generatore di forme d'onda)

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

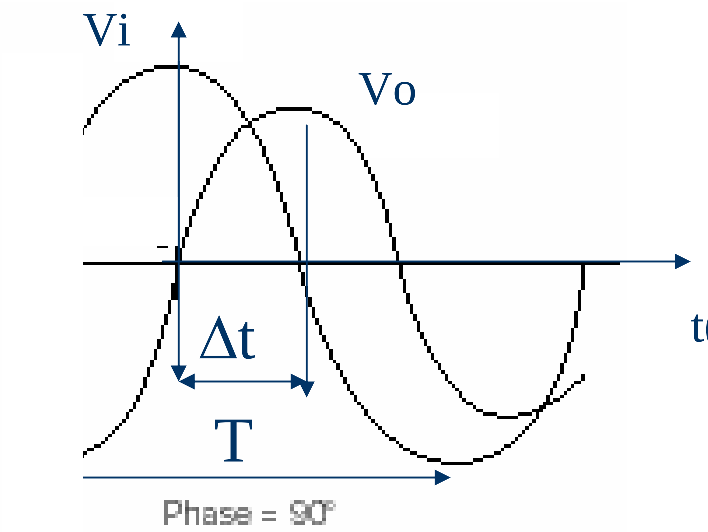
Ancora sulle misure di fase:

Consideriamo un segnale di ingresso sinusoidale e per semplicità prendiamo la fase iniziale $\phi_0 = 0$: $V_i = V_{0i} \cos\omega t$

Il segnale di uscita è sfasato di ϕ rispetto a V_i: $V_o = V_{0o} \cos(\omega t+\phi)$ e supponiamo che $\phi = -90°$.

V_o è in anticipo o in ritardo rispetto a V_i?

Per t=0: $V_i = V_{0i}$ (l'ingresso è massimo) mentre $V_o = V_{0o} \cos(-90°)=0$ non è massimo ma è minimo. Il massimo del segnale di uscita si ha per $\omega t = 90°$ ovvero per t>0 quindi il segnale di uscita è in ritardo (vedere figura) rispetto a V_i.



Si misura $\Delta t = t_{ingresso} - t_{uscita} < 0$ in accordo con $\phi = 360°\Delta t/T < 0 = -90°$

Se $\phi = 90° \Rightarrow V_o$ è in anticipo rispetto a V_i e $\Delta t = t_{ingresso} - t_{uscita} > 0$ in accordo con $\phi = 360°\Delta t/T > 0 = 90°$.

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

Richiami sul formalismo in alternata:

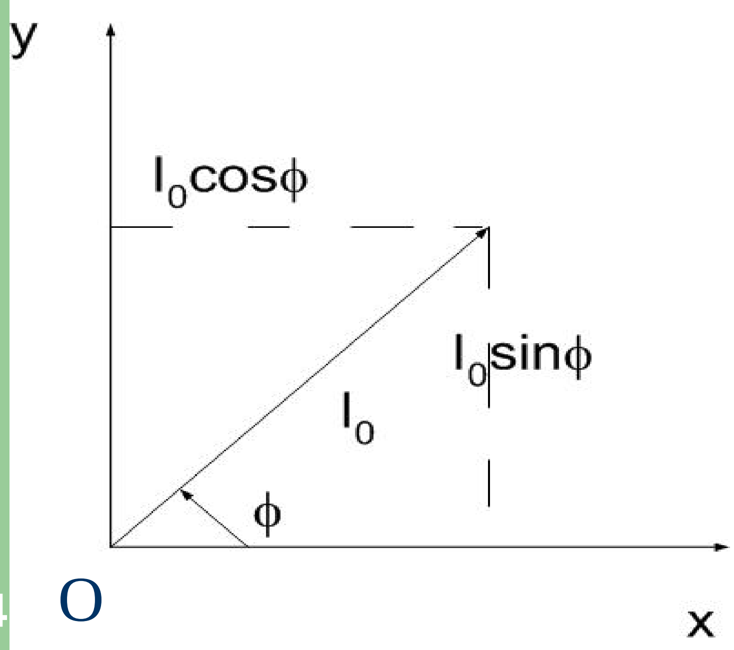
Le grandezze in regime alternato si rappresentano con numeri complessi.

Per es. una corrente in regime sinusoidale $i = i_0 \cos(\omega t+\phi)$ si rappresenta come $\mathbf{I} = \mathbf{I_0}\, e^{j\omega t}$ dove $\mathbf{I_0} = i_0 e^{j\phi} = i_0(\cos\phi + j \sin\phi)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{I} = \mathbf{I_0}\, e^{j(\omega t+\phi)}$

Il modulo è i_0 è il massimo valore della corrente;

l'argomento ϕ è l'angolo di fase che determina il valore di i(t) per t=0;

ω è la pulsazione che è legata alla frequenza: $\omega = 2\pi\nu$ che rappresenta il numero di oscillazioni complete di i(t) in 1 sec.



La corrente può essere rappresentata come un vettore rotante attorno ad O con velocità angolare ω e la legge secondo cui varia la sua proiezione lungo l'asse x in funzione di t rappresenta la grandezza fisica $i = i_0 \cos(\omega t+\phi)$

Comportamento degli element R, L, C in regime sinusoidale

- Resistenza: V=RI la differenza di fase tra corrente e tensione è nulla essendo R un numero reale indipendente dalla frequenza e $Z_R = R$

- Condensatore:
- V = q/C = $\frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{1}{C}\int I_0 e^{j\omega t}dt = \frac{I_0}{j\omega C}e^{j\omega t} = \frac{I}{j\omega C} = V_0 e^{j\omega t}$

L'impedenza complessa del condensatore è

V/I =V$_0$/I$_0$= $Z_C(\omega)$ = 1/(jωC) = $\frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

La tensione è in ritardo di fase costante di 90° rispetto alla corrente.
Il condensatore presenta reattanza ∞ per corrente continua ω = 0.

- Induttanza: V = Ldi/dt = $L\frac{d}{dt}(I_0 e^{j\omega t}) = jLI_0\omega e^{j\omega t} = j\omega LI = V_0 e^{j\omega t}$

L'impedenza complessa dell'induttanza è:
V/I = $Z_L(\omega)$ = jωL= $\omega L e^{j\pi/2}$
La tensione è in anticipo di fase costante di 90° rispetto alla corrente

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

Analisi del circuito RLC serie:

La funzione di trasferimento è un numero complesso:

$\mathbf{A}(\omega) = \mathbf{V_o}/\mathbf{V_i} = Z_R/(Z_R+Z_L+Z_C) = 1/[1+(Z_L+Z_C)/Z_R] = 1/\{1+j\ /R[\omega L-1/(\omega C)]\}$

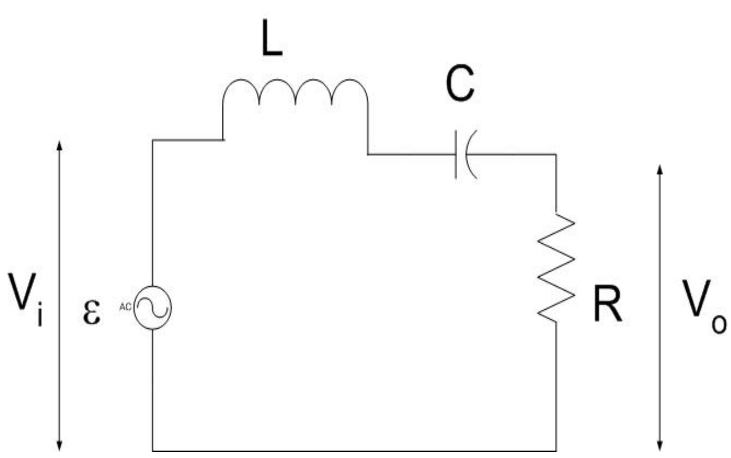
Il suo modulo è

$|\mathbf{A}\ (\omega)| = \sqrt{(A^*A)} = 1/\{1+[\omega L-1/(\omega C)]^2/R^2\}^{1/2}$

La fase è data da:

$\tan\phi = -\ [\omega L-1/(\omega C)]/R$

Per $\omega L = \omega C$ ovvero per $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$ il circuito è in condizioni di risonanza e si comporta come se fosse puramente resistivo: $\mathbf{A}(\omega_0) = A_{max} = 1$ e lo sfasamento tra segnale di ingresso ed uscita è nullo $\phi = 0$.



Quindi per riconoscere la frequenza di risonanza (in realtà per gli errori sperimentali si avrà u(n intervallo di frequenze):

- V_o deve essere massimo
- V_o e V_i devono essere in fase

Prima di cominciare le misure si verifichi che V_o ha l'andamento atteso (cresce e diminuisce all'aumentare della frequenza)

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

La larghezza della risonanza è ω_2-ω_1 = differenza delle pulsazioni per cui $I(\omega_{1,2})/I_{max} = 1/\sqrt{2}$. Si vede che $\omega_2-\omega_1 = R/L$ e si definisce il fattore di merito:
$Q = \omega_0/(\omega_2-\omega_1) = 1/R*\sqrt{(L/C)} = 1/(\omega_0 RC) = \omega_0 L/R$

Valori elevati di Q restringono la larghezza di banda $B = (\omega_2-\omega_1)/(2\pi) \Rightarrow$ aumenta la selettività del circuito rispetto alle frequenze ($S = 1/B$).
Se $Q>10 \Rightarrow \omega_2 \sim \omega_1 \sim \omega_0$ e $Q \sim \omega_0/(\omega_{1,2} - \omega_0)$ e $B = \omega_0/(2\pi Q) = R/(2\pi L) \Rightarrow$ B è funzione solo di R e L e non di C e variando C si varia solo la frequenza di risonanza ("sintonia") e non la larghezza di banda

Si trova: $|\mathbf{A}(\omega)| = 1/\{1+Q^2[\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega]^2\}^{1/2}$ e $\tan\phi = -Q[\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega]$

Tuttavia R non è l'unica resistenza presente nel circuito!

L'induttanza presenta una resistenza R_L in continua ($\nu=0$) che vale 170Ω per quella utilizzata in laboratorio ma per effetto pelle aumenta con $\sqrt{\nu}$

Effetto pelle: in corrente alternata il modulo del campo magnetico generato dalla stessa corrente rende la densità di corrente non uniforme nella sezione del conduttore.

Dato un conduttore cilindrico esso può essere suddiviso in tanti conduttori di ugual area coassiali in parallelo tra loro.

Il flusso concatenato col singolo conduttore $d\Phi$ elementare diminuisce con la distanza dal centro (è massimo nel conduttore centrale e minimo per il conduttore più esterno e poiché $dL = d\Phi/i$ per ogni conduttore $\Rightarrow$ dL è minore per i conduttori più esterni e la corrente alternata è maggiore per i conduttori periferici dove la reattanza $Z_L = j\omega L$ è minore che per i conduttori centrali

L'effetto pelle aumenta con la frequenza ν perché con essa aumenta il valore della reattanza induttiva rispetto alla resistenza e quindi cresce la disuniformità della corrente. L'effetto diminuisce con la resistività

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

Analisi del circuito RLC serie considerando la resistenza totale $R_T = R+R_L$:

Si ottiene:

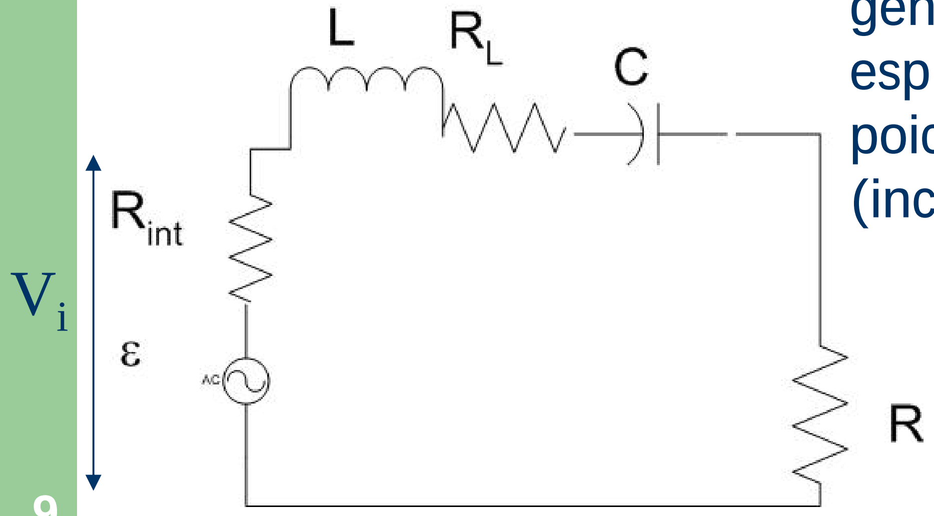
$\mathbf{A} = 1/\{[R_T/R + j/R[\omega L-1/(\omega C)]\}$

E quindi $|\mathbf{A}| = 1/\{[(R_T/R)^2 + [\omega L-1/(\omega C)]^2/R^2\}^{1/2}$

e $\tan \phi = -[\omega L-1/(\omega C)]/R_T$

Inoltre utilizzando il fattore di merito $Q' = \omega_0 L/R_T = 1/(\omega_0 R_T C)$:

$|\mathbf{A}(\omega)| = 1/\{R_T^2/R^2+Q'^2[\omega/\omega_0- \omega_0/\omega]^2\}^{1/2}$ e $\tan \phi = -Q'[\omega/\omega_0- \omega_0/\omega]$



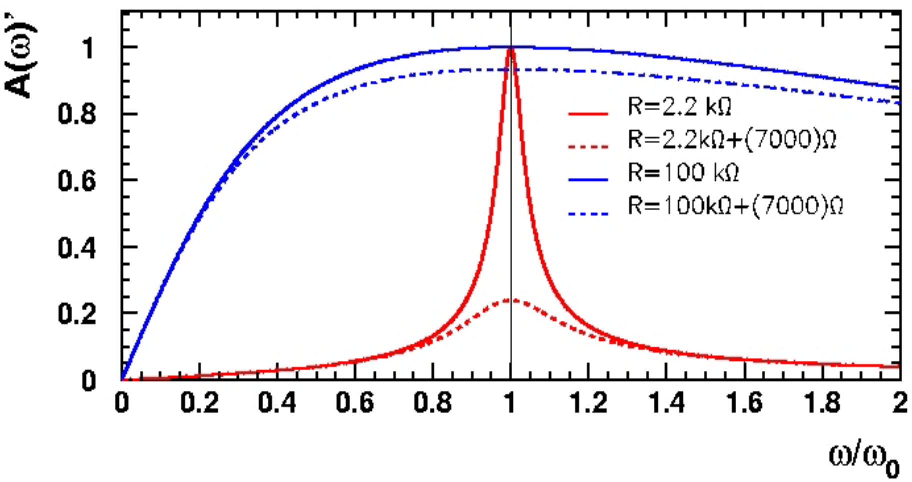
Osserviamo che la resistenza di ingresso del generatore (600Ω) non interviene nella espressione della funzione di trasferimento poiché si misura V_i ai capi del generatore (inclusa R_{int})

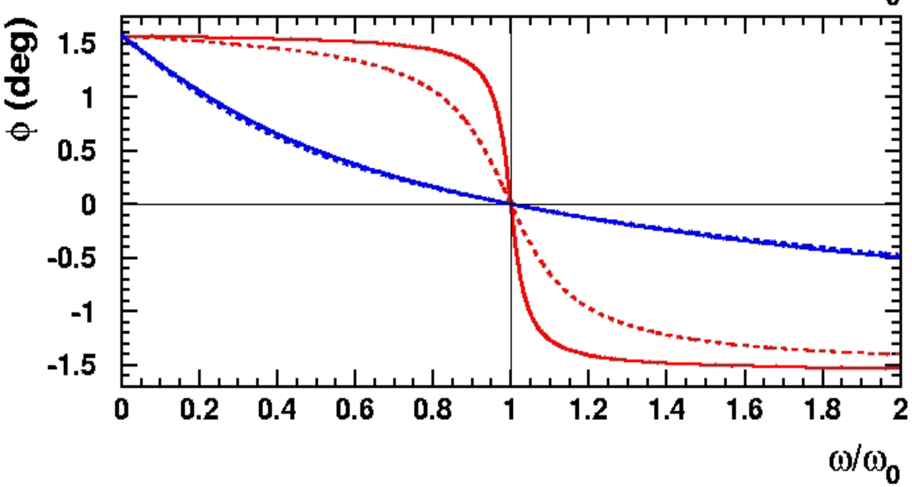
Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

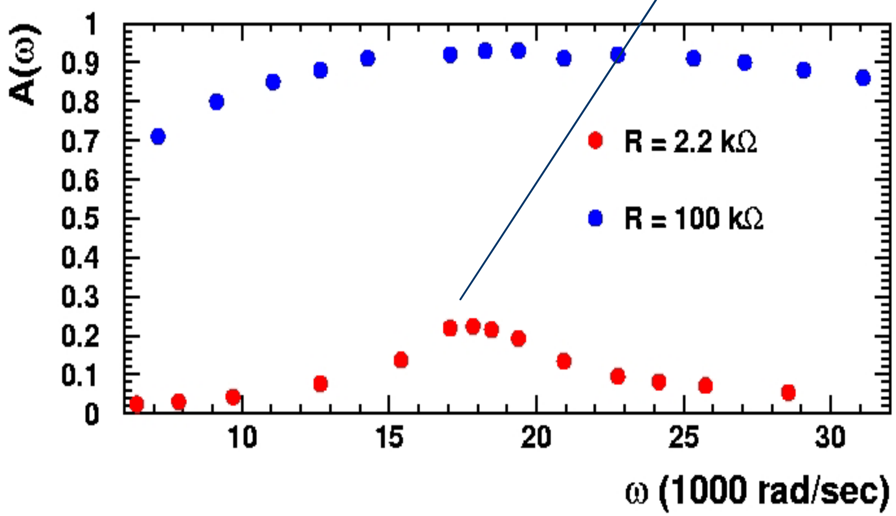
Funzioni attese e misurate

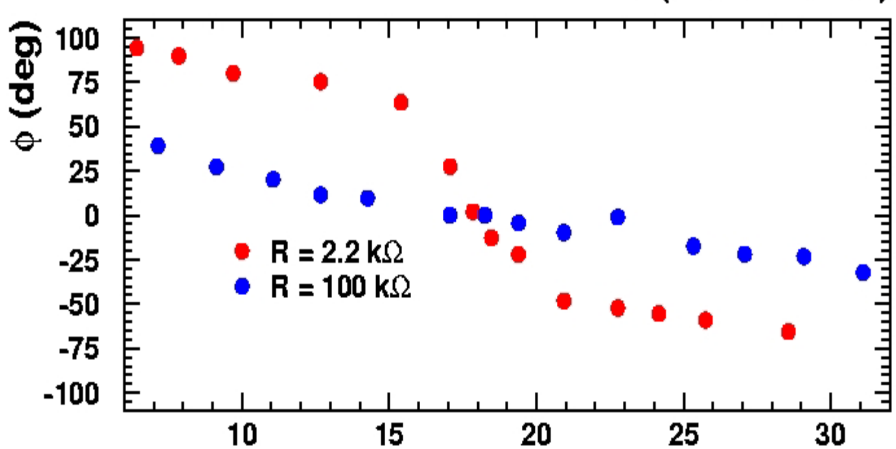
per R = 2.2kΩ e R=100 kΩ ma con R_T > 7KΩ si spiega la curva

Effetto pelle









Attenzione: curve e misure sono per R_{int} = 50 Ω

Esperienza n. 9 Uso dell'oscilloscopio per misure di ampiezza e frequenza di una tensione alternata e misura dello sfasamento tra tensioni. Circuito RLC serie

Si può avere una misura di L e R_T seguendo 2 metodi:

- $|\mathbf{A}(\omega)| = 1/\{R_T^2/R^2+Q'^2 R_T^2/R^{2*}[\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega]^2\}^{1/2}$ e $\tan\phi = -Q'[\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega]$

dove $Q' = \omega_0 L/R_T$

In condizioni di risonanza: $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{(LC)} \Rightarrow \mathbf{A} = A_{max}$ e $\phi = 0$

Misurata la pulsazione in condizioni di risonanza $(\omega_0)_{mis}$ si ottiene:

$L = 1/(\omega_0{}^2{}_{mis}\, C)$ e $A_{max} = R/R_T \Rightarrow R_T = R/\max(V_o/V_i)$

- E' possibile ottenere questi valori anziché a partire da un unico valore di frequenza da un intervallo intorno alla regione di risonanza mediante un fit lineare.

Chiamo: $\omega/\omega_0 = x$ e $\tan\phi = y \Rightarrow y = m(x-1)$ con $m = d/dx[Q(1/x-x)]_{x=1}=$
$=-Q(1/x^2+1)|_{x=1} = -2Q$

$y = -2Q(x-1) = -(2L/R_T)\omega + 2/R_T\sqrt{(L/C)} = -A\omega+B$

Si esegua il fit lineare per $\omega\in[1/5\omega_0, 5\omega_0]$ ottenendo così

$2L/R_T = A$ e $2/R_T\sqrt{(L/C)}=B \Rightarrow R_T = 2A/(CB^2)$ e $L = AR_T/2 = A^2/(CB^2)$

e rispettivi errori

Oltre ai metodi già incontrati di misura di R e C abbiamo un metodo di misura di induttanze