

Cinematica nello Spazio

Abbiamo introdotto, nelle precedenti lezioni, le grandezze fisiche:

- 1) Spostamento;
- 2) Velocità;
- 3) Accelerazione;
- 4) Tempo.

Abbiamo ricavato le equazioni per i moti:

- a) uniforme;
- b) uniformemente accelerato.

Parallelamente abbiamo introdotto i VETTORI e le operazioni tra essi (somma, differenza, prodotto Scalare e prodotto vettoriale)



Cinematica nello Spazio

Adesso dobbiamo trattare le grandezze fisiche spostamento, velocità e accelerazione come vettori.

...e ricavare le equazioni del moto.

In questo modo potremmo studiare il moto dei corpi in sistemi di riferimento nello spazio



Cinematica nello Spazio

I vettori saranno talvolta rappresentati con il grassetto:

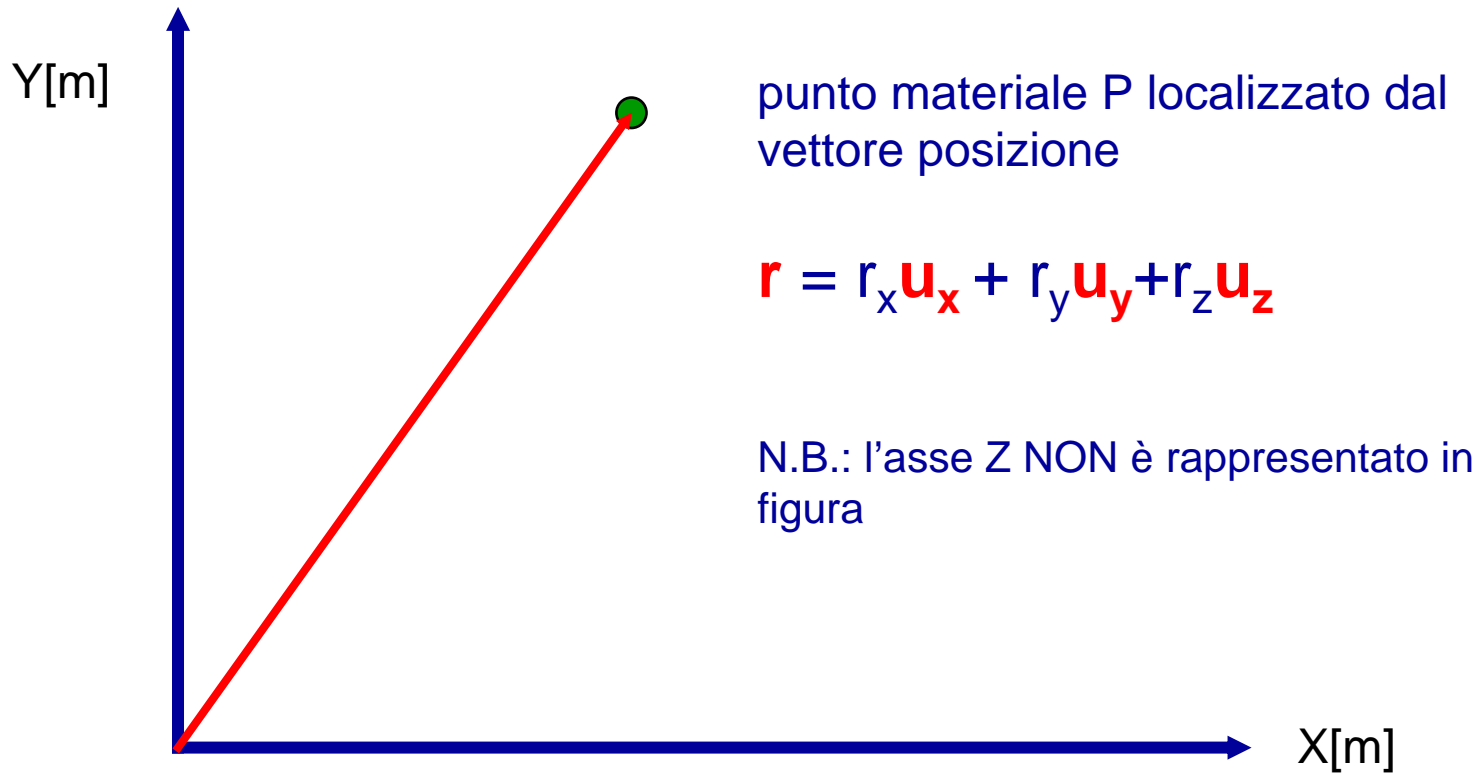
a = grandezza scalare;

a = grandezza vettoriale.

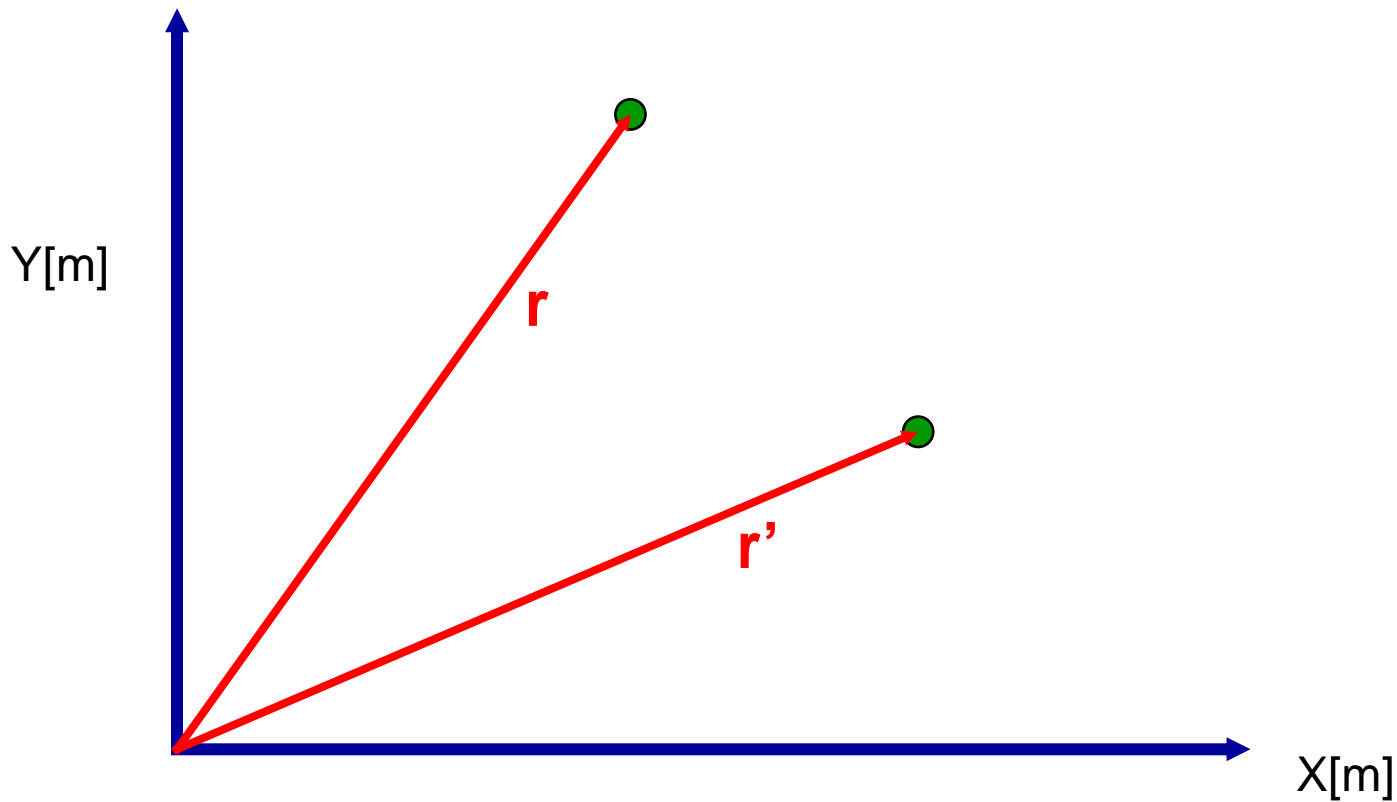
Sui vostri appunti rappresentate le grandezze vettoriali con il trattino sulla lettera.



Cinematica nello Spazio



Possiamo localizzare un punto materiale
nello spazio per mezzo del vettore posizione



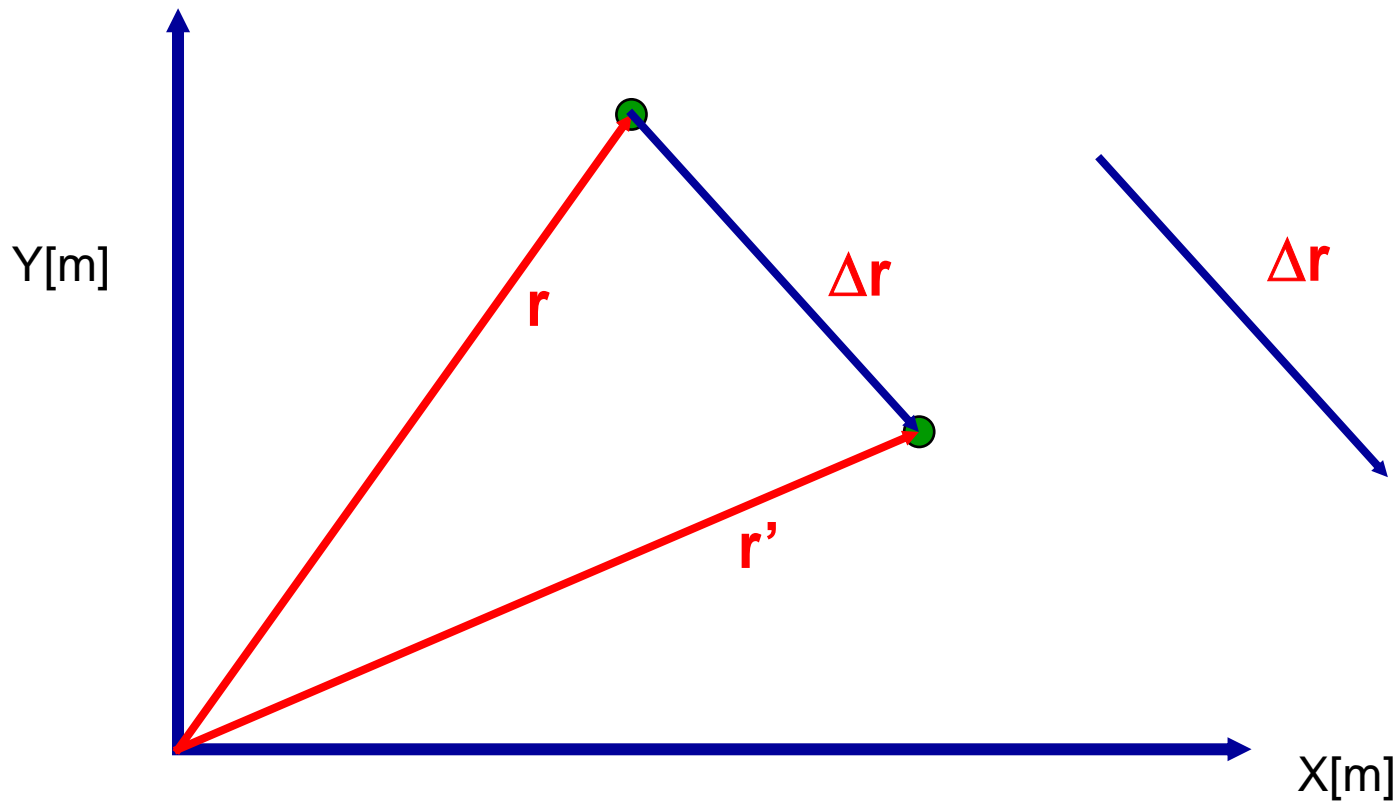
Il punto materiale si sposta dalla posizione

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{u}_x + r_y \mathbf{u}_y + r_z \mathbf{u}_z$$

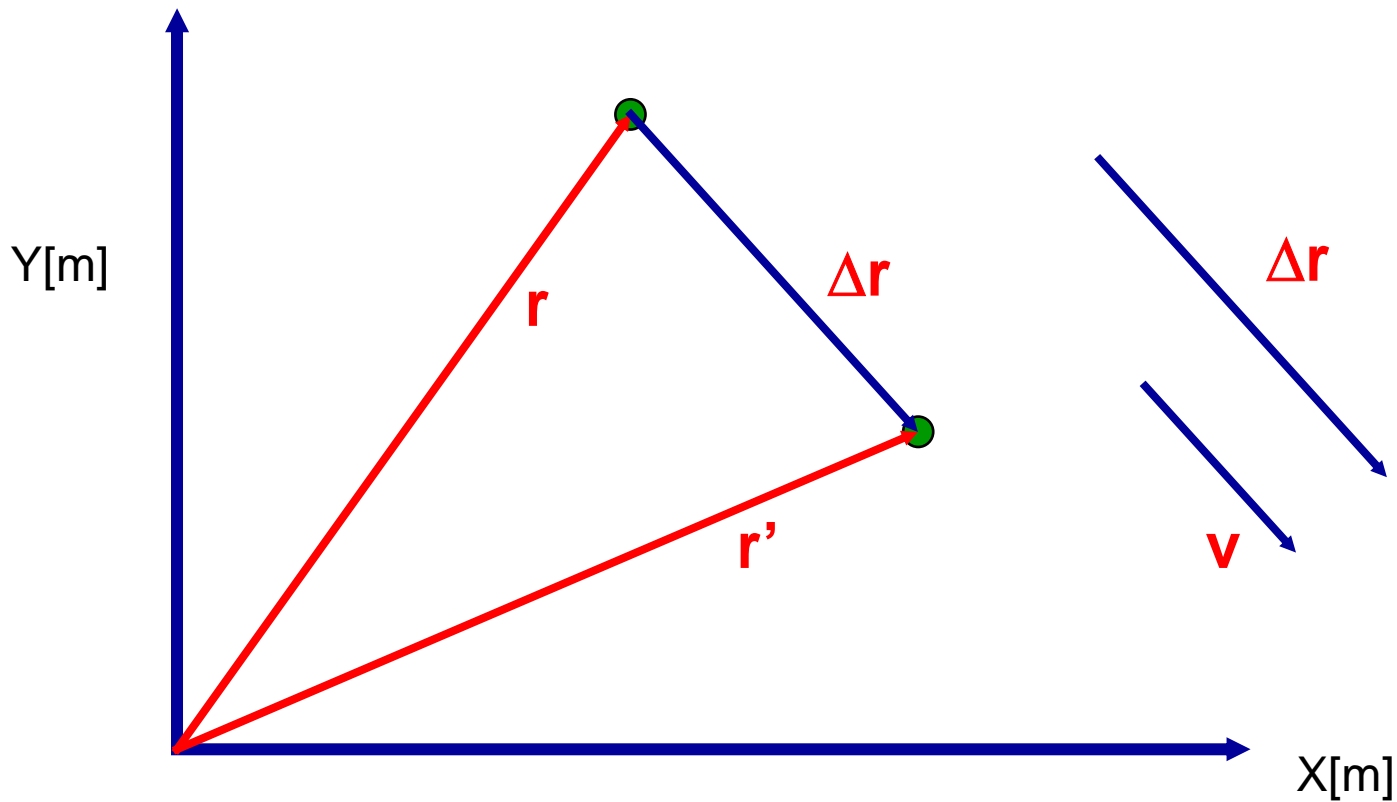
alla posizione:

$$\mathbf{r}' = r'_x \mathbf{u}_x + r'_y \mathbf{u}_y + r'_z \mathbf{u}_z$$





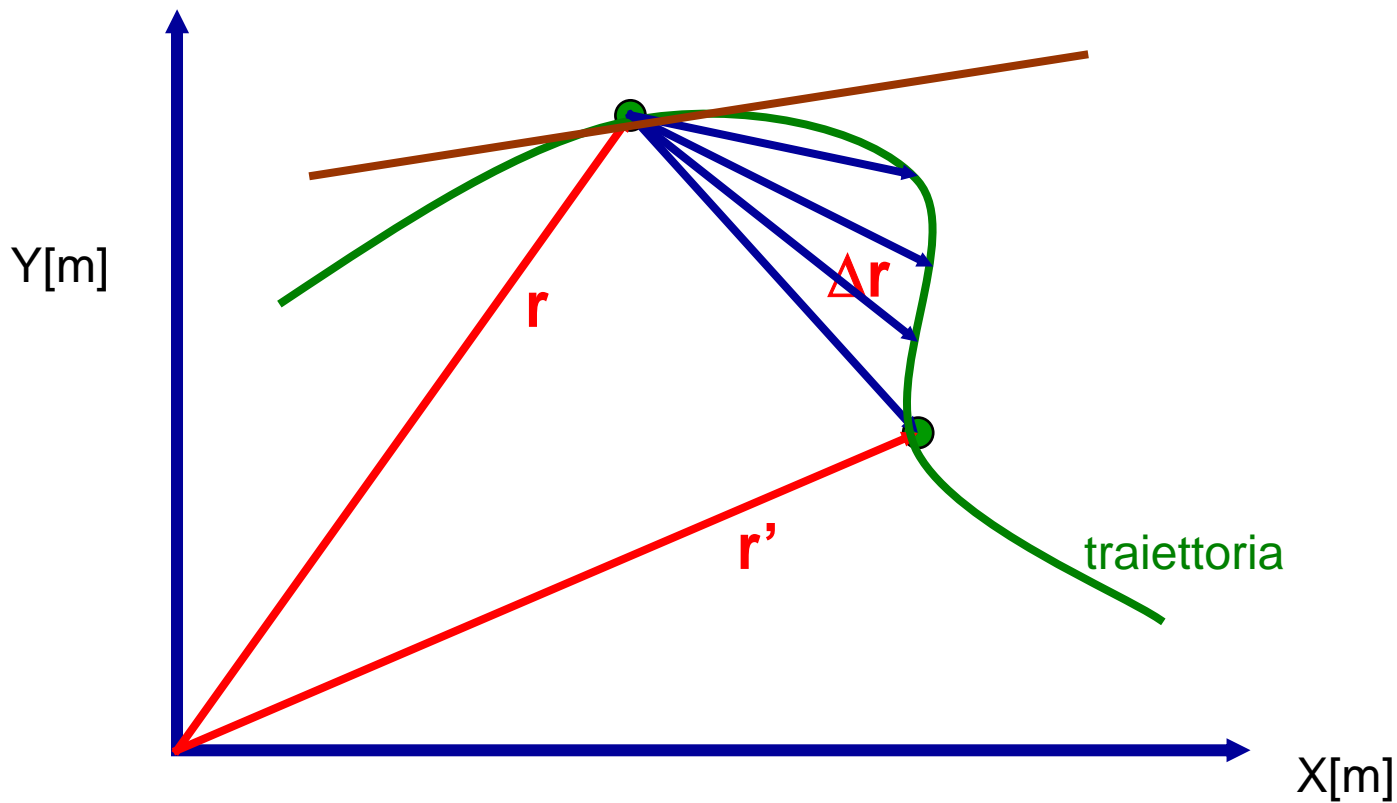
Possiamo calcolare il vettore SPOSTAMENTO
 $r' - r = \Delta r$.



Possiamo definire la velocità vettoriale come:

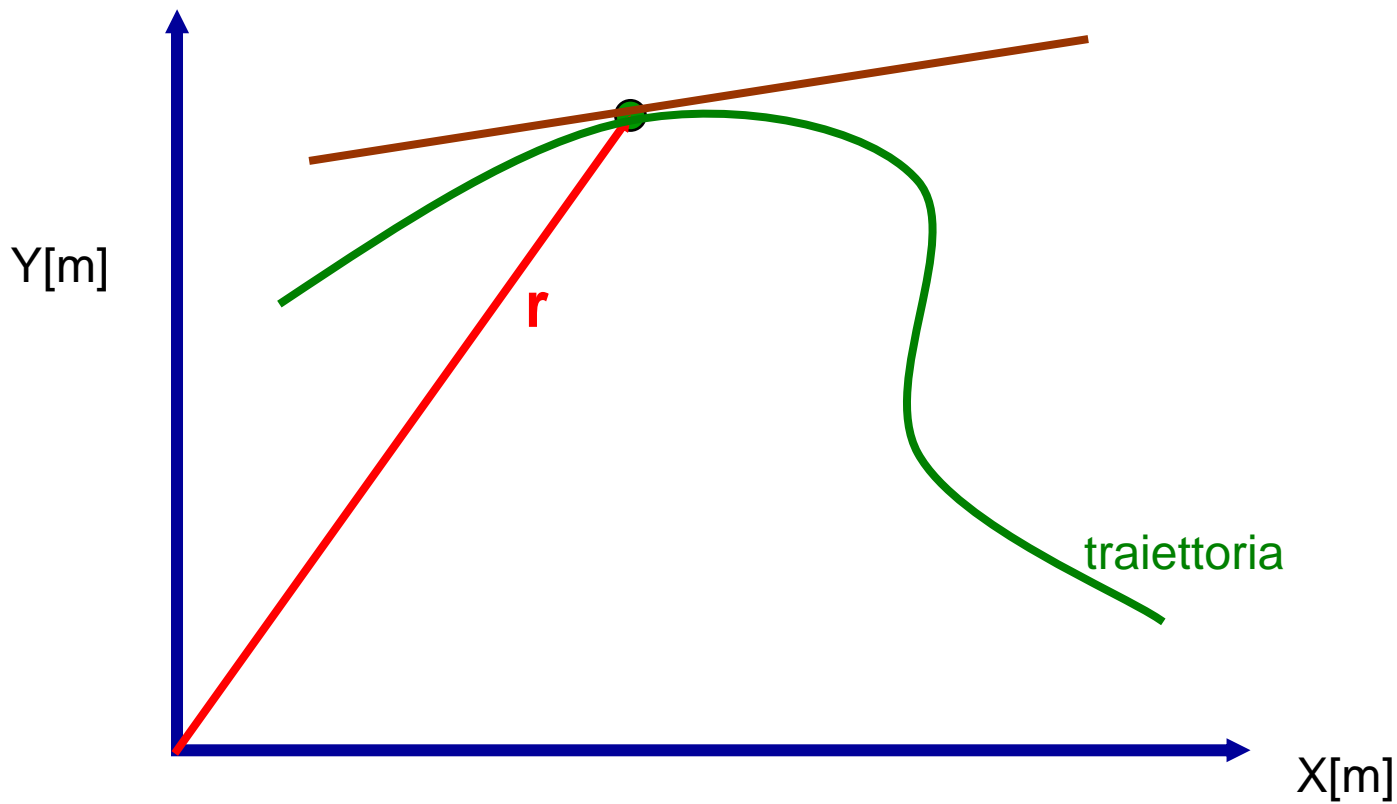
$$\mathbf{v} = \Delta \mathbf{r} / \Delta t.$$

Il vettore velocità ha la stessa direzione di $\Delta \mathbf{r}$



Come nel caso UNIDIMENSIONALE, se vogliamo il valore istantaneo di velocità vettoriale dobbiamo considerare intervalli di tempo molto piccoli.

Cioè: $V_{\text{istantanea}}$ se $\Delta t \rightarrow 0$
STUDIAMO LA DIREZIONE



La DIREZIONE del vettore $V_{\text{istantanea}}$ è quella retta tangente alla TRAIETTORIA nel punto considerato.

Analogamente possiamo definire l'accelerazione vettoriale come:

$$\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t.$$

Il vettore accelerazione **a** NON ha la stessa direzione delle velocità o dello spostamento.



Cinematica nello Spazio

Il vettore accelerazione non ha, in generale, la stessa direzione e lo stesso verso del vettore spostamento e del vettore velocità.

Studiamo alcuni casi particolarmente significativi.



Caso più semplice:

Il vettore velocità è costante.

$$\vec{v} = \mathbf{cost} \implies \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \implies \vec{a} = 0$$

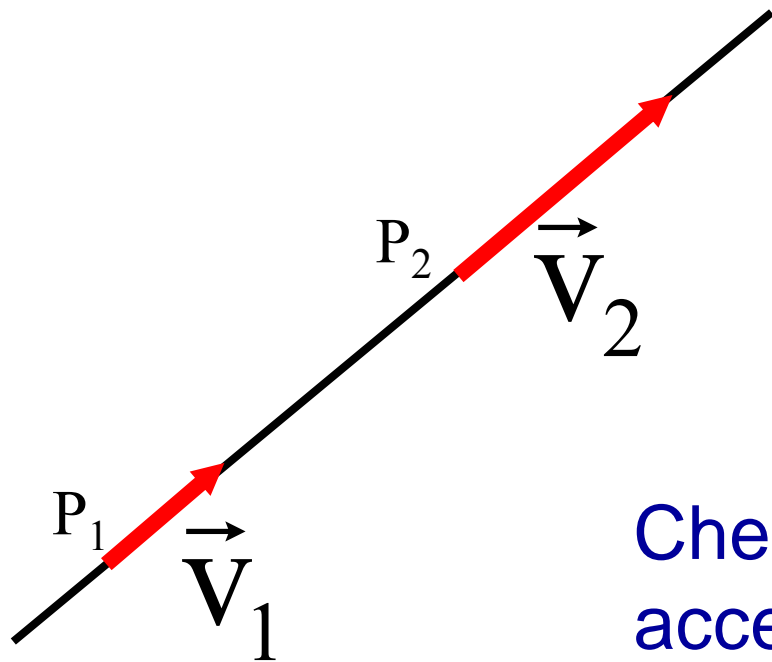
Importante:

$$v = \mathbf{cost} \not\Rightarrow \vec{v} = \mathbf{cost}$$



Moto NON uniforme su traiettoria rettilinea,
cioè:

Il vettore velocità è costante in DIREZIONE e
VERSO ma non in modulo.

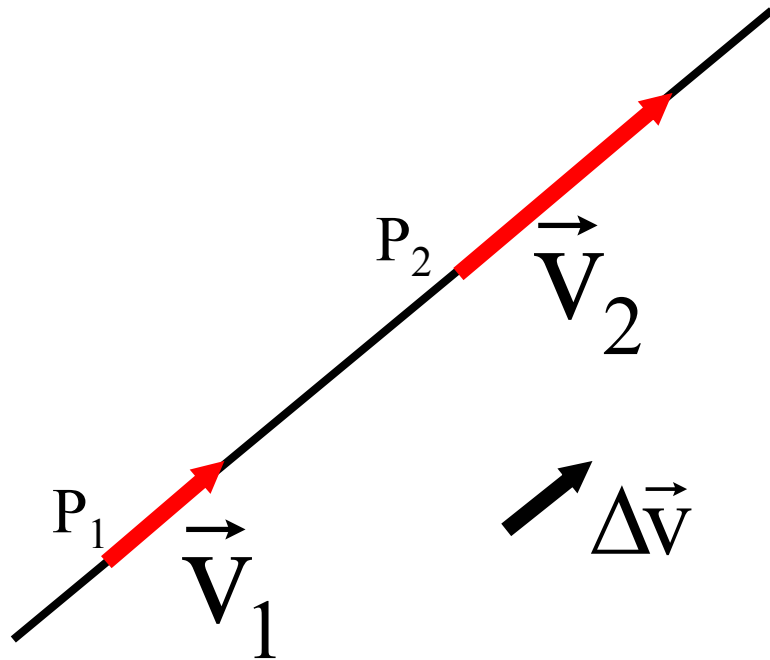


$$\vec{a} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$$

Che direzione ha il vettore
accelerazione?

Ha la direzione di $\Delta\vec{v}$

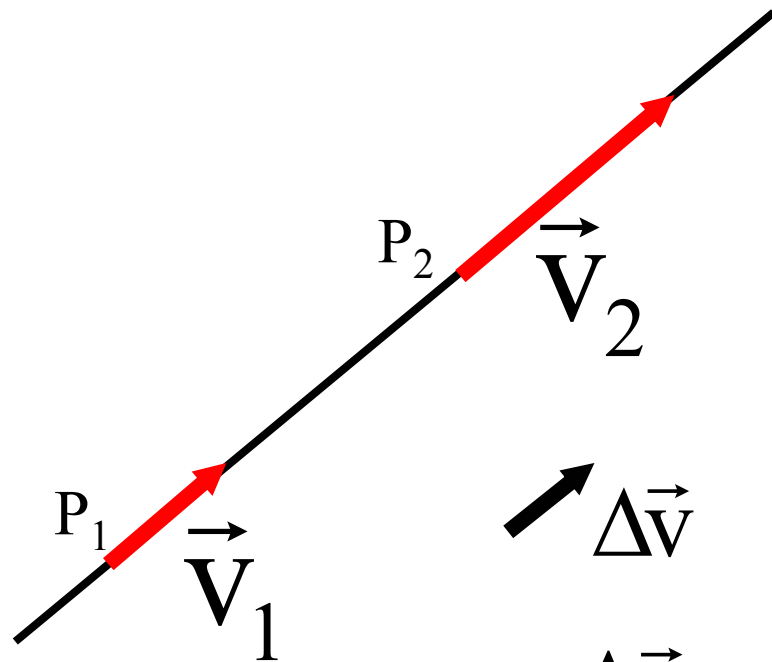
In questo caso la accelerazione ha la stessa direzione dei vettori velocità.



Questo è il caso di una **AUTOMOBILE** che accelera in rettilineo.

Ha la direzione di $\Delta\vec{v}$

In questo caso la accelerazione ha la stessa direzione dei vettori velocità.

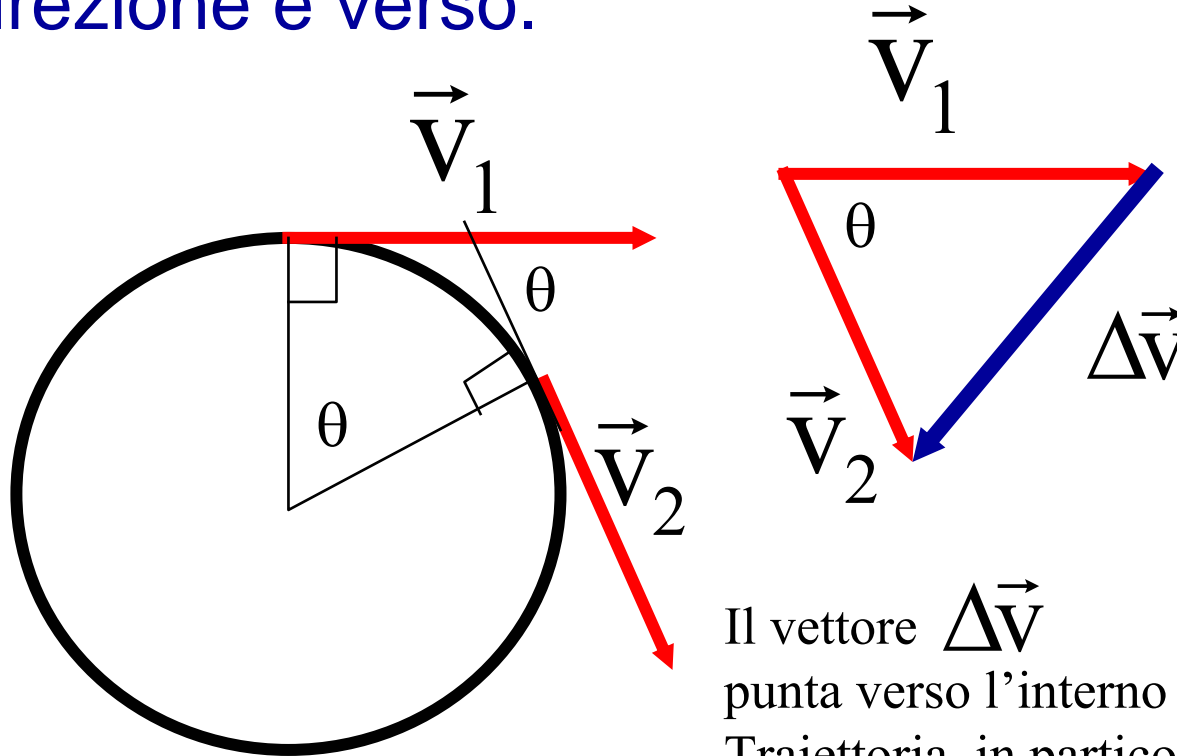


Questo è il caso di una **AUTOMOBILE** che accelera in rettilineo.

$$\Delta\vec{v} = \Delta v \vec{u}_T \Rightarrow \vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{u}_T$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

La traiettoria è una circonferenza. Il vettore velocità è costante in MODULO ma non in direzione e verso.



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \vec{u}_N$$

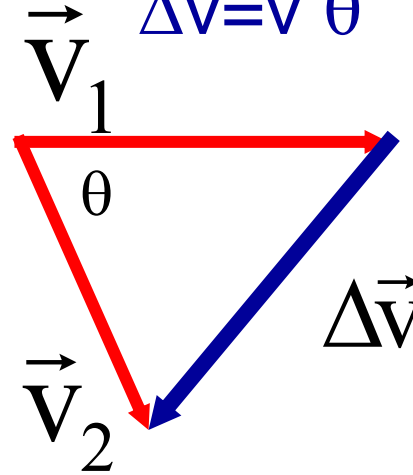
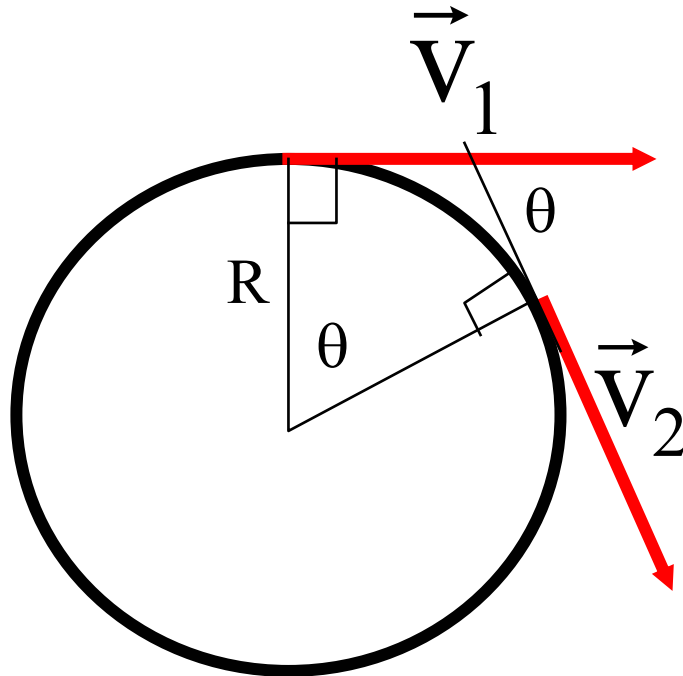
Il vettore $\Delta \vec{v}$ punta verso l'interno della Traiettoria, in particolare (SENZA DIMOSTRAZIONE) VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO

MOTO CIRCOLARE UNIFORME (2)

Calcoliamo ora il modulo dell'accelerazione.

Se θ è piccolo

$$\Delta v = v \theta$$



Ma si può anche scrivere

$$\theta = \text{ARCO}/\text{raggio} = v \Delta t / R$$

$$v \Delta t / R = \Delta v / v \longrightarrow a = \Delta v / \Delta t = v^2 / R$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME (3)

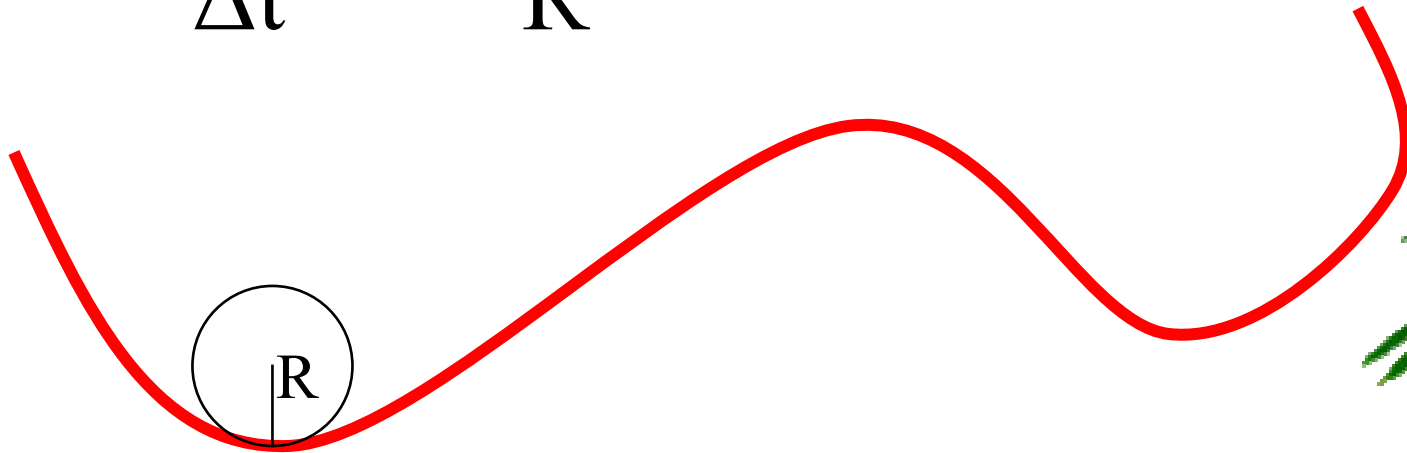
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

Accelerazione Centripeta




CASO GENERALE

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{u}_T + \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$



ACCELERAZIONE di GRAVITA'


$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

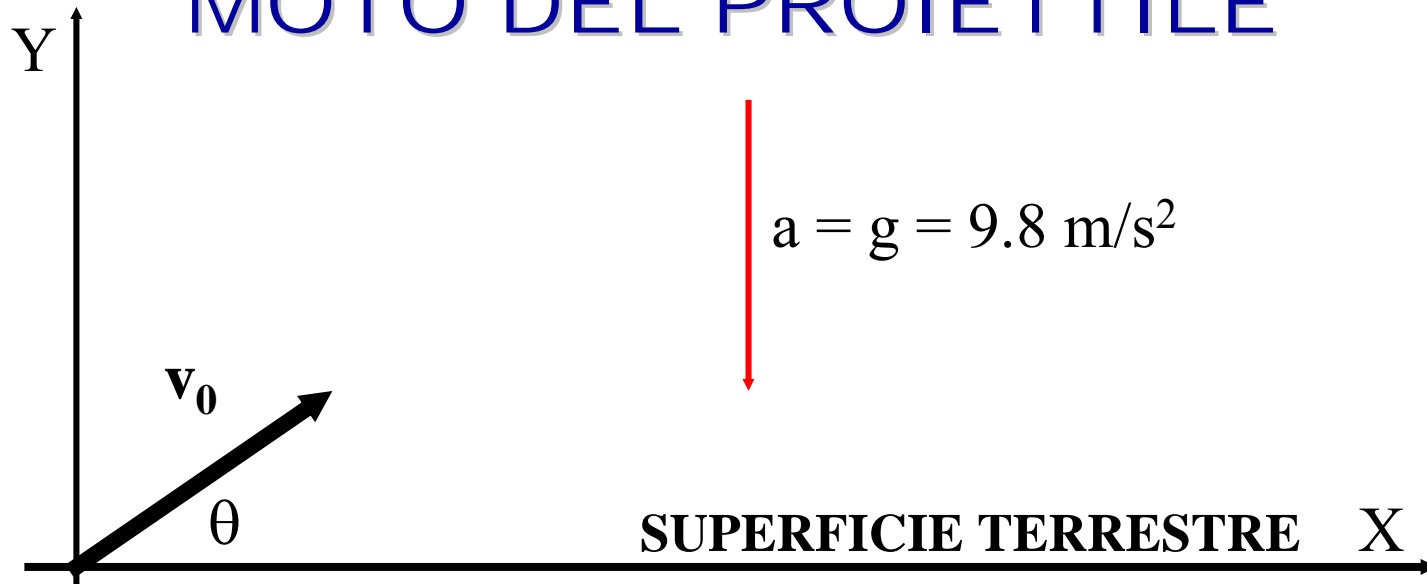
SUPERFICIE TERRESTRE

L'accelerazione di gravità è diretta verso il centro della Terra ed ha il valore di $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Negli esercizi di cinematica/dinamica si trascura la Curvatura terrestre e si assume che g sia semplicemente diretta verso il basso.



MOTO DEL PROIETTILE

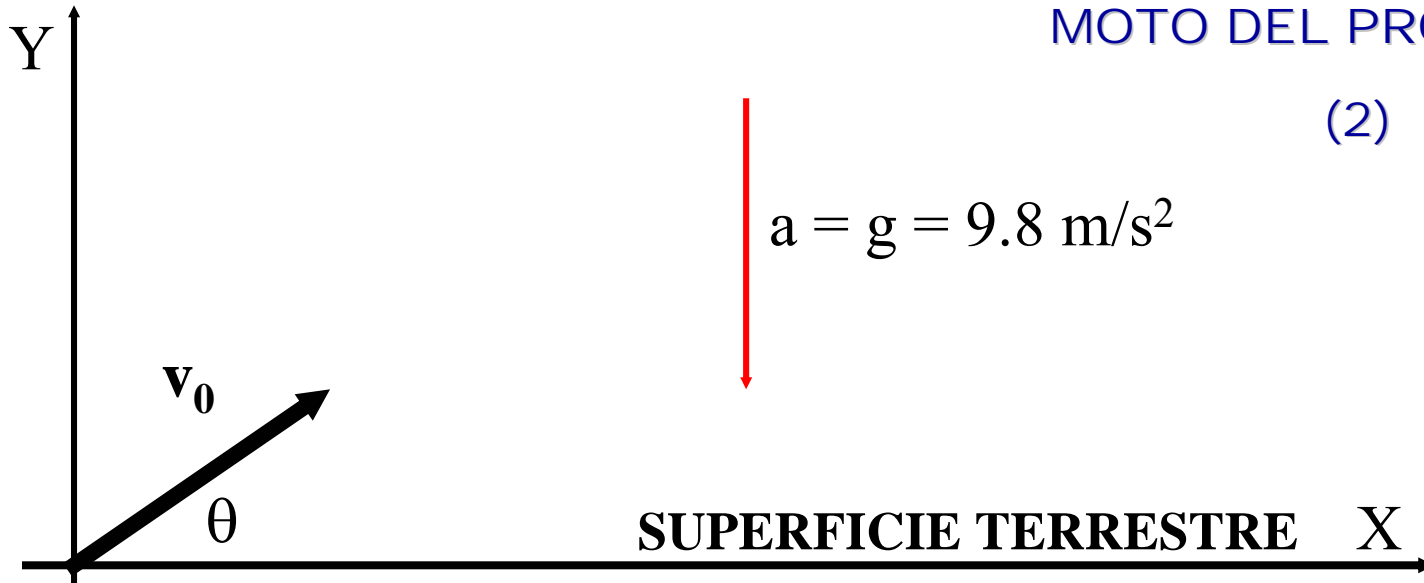


Un punto materiale ha velocità iniziale v_0 inclinata di un angolo θ sull'orizzontale.

Vogliamo determinare la traiettoria del punto materiale.

Si osserva che l'accelerazione è presente solo nella direzione Y.

Scriviamo separatamente le equazioni orarie del punto materiale su asse X ed asse Y.

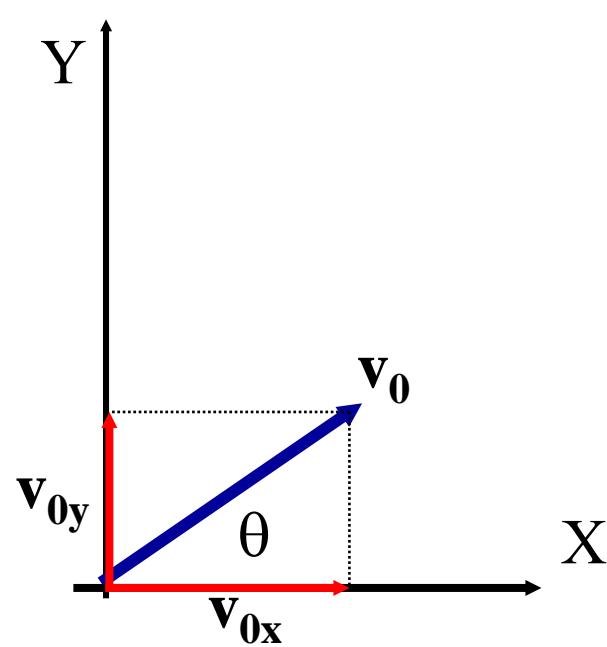


Che tipo di Equazioni orarie governano il moto
Del punto materiale?

Su asse X non c'è accelerazione: equazione del moto
rettilineo uniforme.

Su asse Y c'è accelerazione g : equazione del moto
uniformemente accelerato.

(3)



$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

Si deve scomporre la velocità iniziale secondo le Componenti X e Y.

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

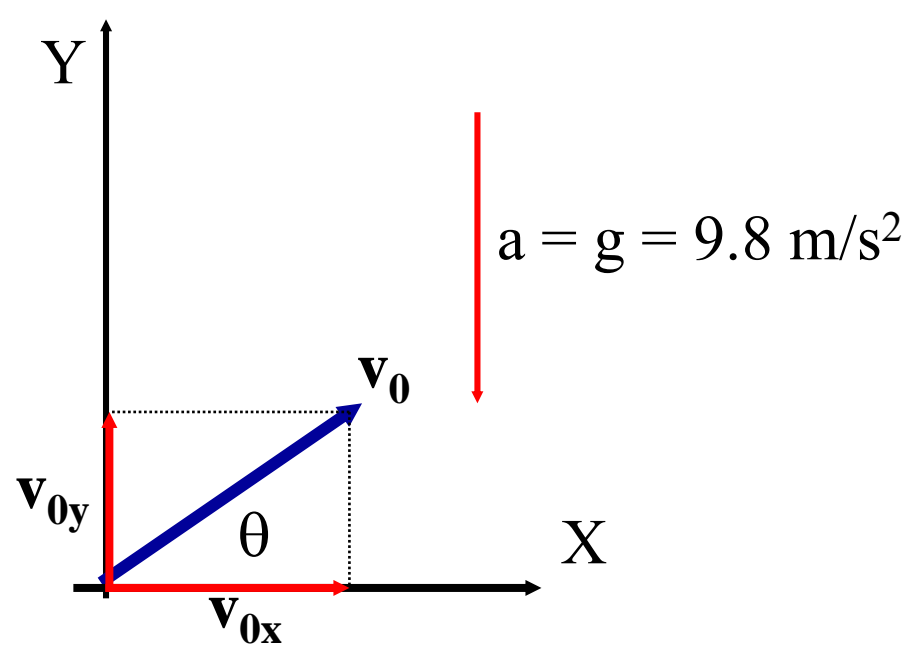
$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Le due equazioni orarie sono:

$$x = v_{0x} t$$

$$y = v_{0y} t - gt^2/2$$

(4)



Dalle due equazioni orarie si elimina il tempo e si ricava l'equazione della traiettoria:

$$t = x/v_{0x}$$

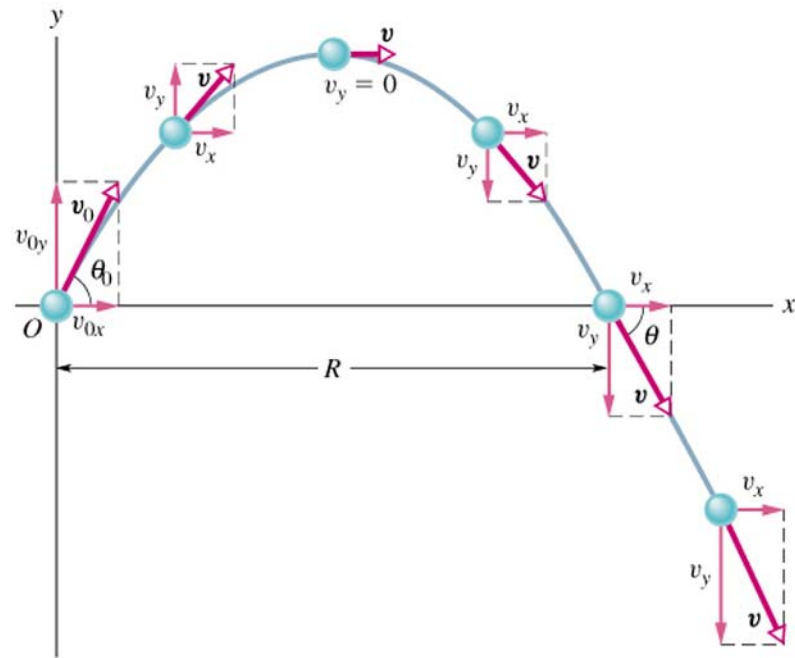
$$y = v_{0y} x/v_{0x} - g(x/v_{0x})^2/2 \rightarrow$$

$$y = -(g/v_{0x}^2/2)x^2 + (v_{0y}/v_{0x})x$$

Equazione di secondo grado del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

EQUAZIONE DI UNA PARABOLA.



Dalle due equazioni orarie e dalla equazione della traiettoria si possono ricavare molte caratteristiche salienti sul moto.

1. Quanto tempo il proiettile resta in aria?
2. Qual è la massima altezza raggiunta?
3. A che distanza tocca Terra?



ESERCIZI (1)

16 maggio 2000

Problema 1

Un sasso viene lanciato con una velocità di modulo pari a $v = 17$ m/s e con un angolo di $\theta = 58^\circ$ sopra l'orizzontale.

Trascurando la resistenza dell'aria, determinare il tempo impiegato a raggiungere la massima altezza.

Soluzione

Nel punto di massima altezza la componente y della velocità è nulla.

Se t^* è il tempo impiegato a raggiungere la massima altezza:

$$V_y(t^*) = 0$$

$$\text{Ma } V_y = V_{0y} - gt \rightarrow 0 = V_{0y} - g t^* \rightarrow t^* = V_{0y}/g = V_0 \sin \theta / g$$



ESERCIZI (2)

8 gennaio 2002

Problema 1

Un aereo da soccorso vola ad una velocità $v = 360$ km/h alla quota costante di $h = 490$ m. Quale distanza x , misurata sull'orizzontale, percorre un pacco lasciato cadere dall'aereo?

Soluzione

La velocità iniziale ha SOLO la componente orizzontale, che rimane costante.

$$x = V_{0x}t \text{ con } V_{0x} = 360 \text{ km/h}$$

E' necessario determinare t^* = tempo impiegato dal pacco a raggiungere il suolo

$$y = h - gt^2/2 \rightarrow 0 = h - gt^2/2 \rightarrow t^{*2} = 2h/g \rightarrow t^* = (2h/g)^{1/2}$$

$$x = V_{0x} (2h/g)^{1/2}$$

