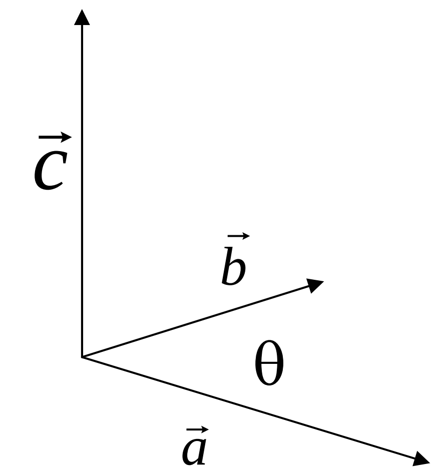
Momento di una forza rispettto ad un punto

Richiamiamo alcune delle definizioni e proprietà sui vettori già discusse all'inizio del corso

Prodotto vettoriale:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\vartheta = ab\sin\vartheta$$



$$\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$$

$$\vec{b} \equiv (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{c} \equiv (c_x, c_y, c_z)$$

Il vettore $\vec{c}$ è diretto lungo la perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Il verso è quello della "regola della mano destra"

In termini di componenti:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Proprietà:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{t} = \vec{u} \times \vec{t} + \vec{v} \times \vec{t}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

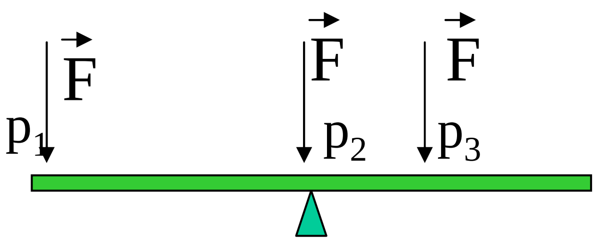
Ricordiamo che abbiamo distinto i vettori in due classi:

a) vettori liberi

b) vettori applicati

I vettori applicati sono specificati oltre che da modulo, direzione e verso, anche dal loro punto di applicazione P.

Ad esempio, nel caso di una forza applicata ad un'asta in equilibrio, è diverso l'effetto della forza sul moto dell'asta a seconda del punto di applicazione nei tre casi mostrati in figura.



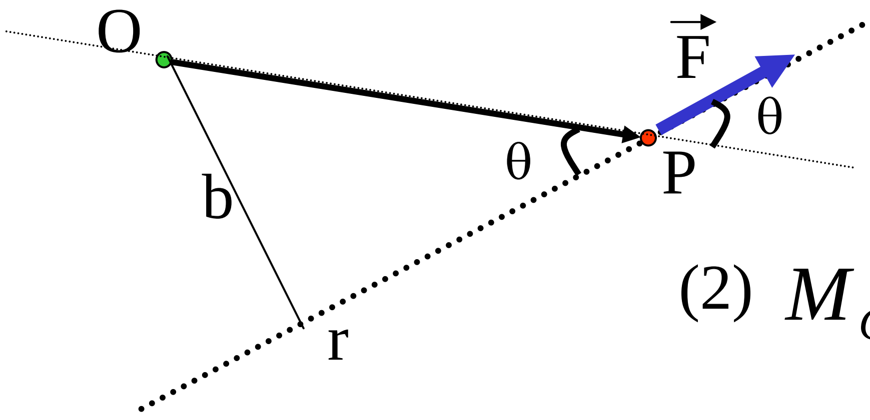
Se la forza è applicata in p_1 l'asta ruota in senso antiorario, se applicata in p_2 resta in equilibrio, se applicata in p_3 ruota in senso orario

Pertanto le forze sono vettori applicati: è sempre necessario specificare il loro punto di applicazione !

Si definisce momento di una forza $\vec{F}$ (applicata nel punto P) rispetto ad un punto O il vettore

$$(1) \quad \vec{M}_O = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$$

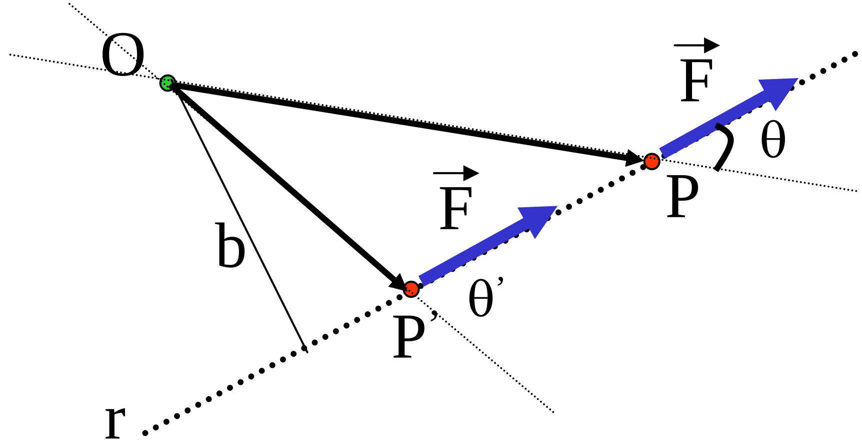
Mostriamo come il momento di una forza, calcolato rispetto ad un punto O, non varia se si cambia il punto di applicazione della forza lungo la propria retta di azione.
Abbiamo definito la retta di azione di una forza come quella retta parallela alla forza e contenente il punto di applicazione della forza.



r è la retta di azione della forza
P il suo punto di applicazione

$$(2) \quad M_O = \left|\vec{M}_O\right| = \overline{OP} \cdot F \cdot \sin\theta = Fb$$

b è detto “braccio” della forza.



Se calcoliamo il momento della forza rispetto allo stesso punto O, assumendo però che la forza sia applicata in un punto P' della retta di azione r, otteniamo per il modulo del momento lo stesso risultato precedente:

$$M'_o = \left|\vec{M}'_o\right| = \overline{OP'} \cdot F \cdot \sin\theta' = Fb$$

Anche la direzione ed il verso di $\vec{M}_o$ non cambiano, cambiando il punto di applicazione della forza lungo la retta di azione ($\vec{M}_o$ è sempre diretto lungo la perpendicolare al piano individuato da r e dal punto O).

Pertanto: **si può spostare una forza lungo la propria retta di azione**

Corollario: **se il punto O giace sulla retta di azione della forza allora il momento della forza rispetto ad O è nullo**

dimostrazione: basta prendere come punto di applicazione proprio O

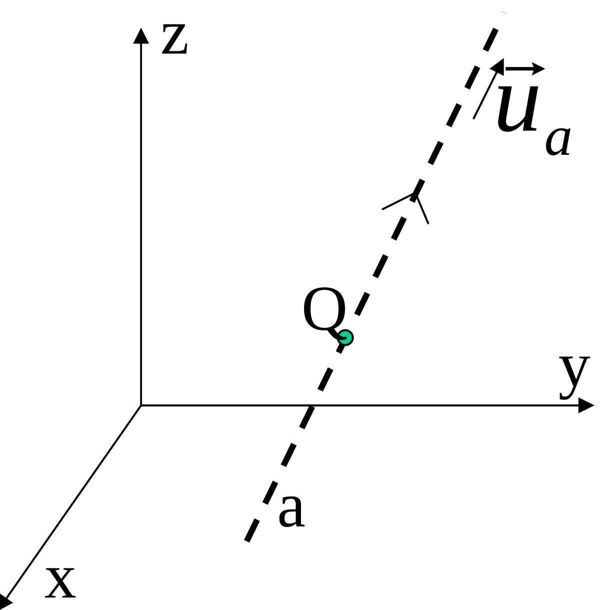
Per quanto detto, il momento di una forza rispetto ad un punto O è nullo in uno dei seguenti due casi:

1) se la forza è nulla
2) se il braccio b è zero (ossia se il punto O si trova sulla retta di azione r della forza)

Momento di una forza rispetto ad un asse orientato

Definiamo un'asse come una retta a cui è stata assegnata una direzione

Ogni asse può essere identificato univocamente per mezzo di un suo punto (es. Q) e di un versore (vettore di lunghezza unitaria) diretto come l'asse

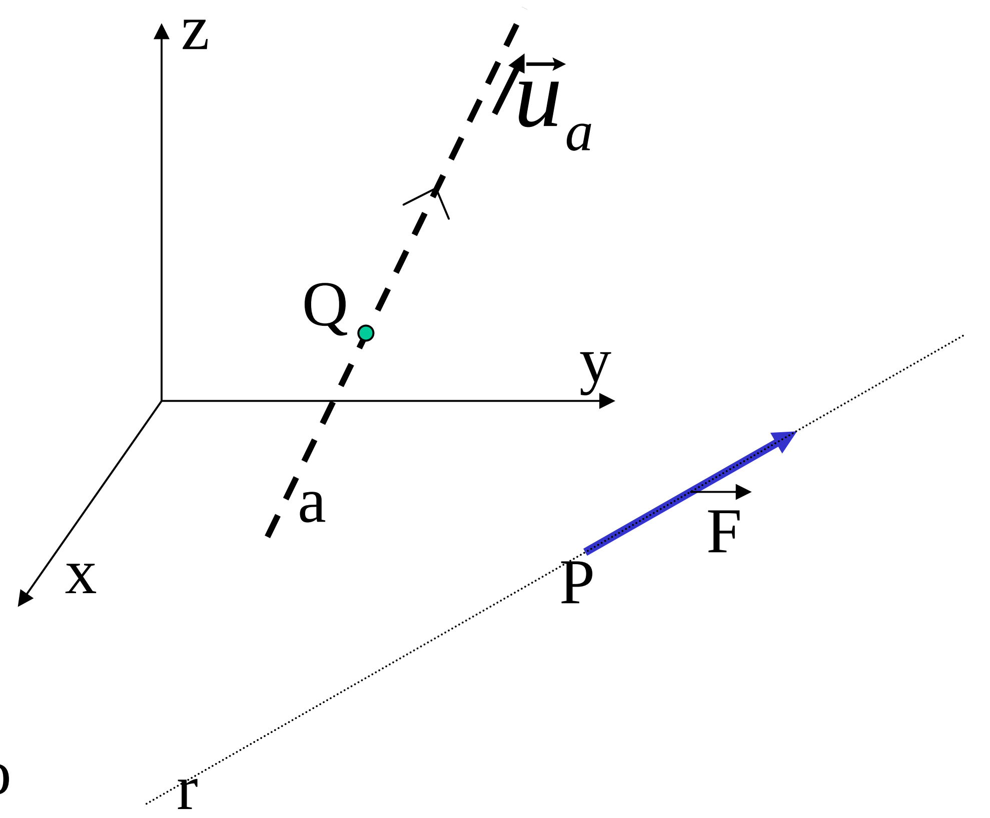


l'asse a in figura è caratterizzato dal punto Q e dal versore $\vec{u}_a$

Il momento di una forza $\vec{F}$ (applicata nel punto P) rispetto ad un asse si definisce come la proiezione sull'asse del momento della forza calcolata rispetto ad un punto qualsiasi dell'asse.

In formule, la definizione è la seguente:

(3)
$$\boxed{\begin{aligned} M_a &= \vec{M}_Q \cdot \vec{u}_a \\ \vec{M}_Q &= \overrightarrow{QP} \times \vec{F} \end{aligned}}$$



Il momento rispetto ad un asse è pertanto uno scalare (o meglio uno "pseudo-scalare"), cioè un numero positivo o negativo

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del momento di una forza (rispetto ad un punto o rispetto ad un asse) è Newton·metro

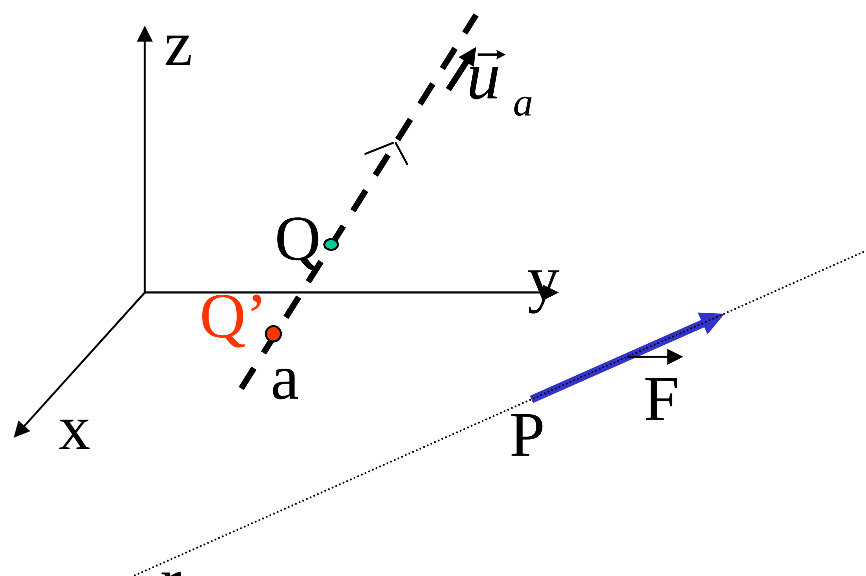
La definizione di momento di una forza rispetto ad un asse, specifica già una proprietà:
il momento di una forza rispetto ad un asse non cambia al variare del punto Q scelto sull'asse per calcolare il momento rispetto ad esso.

Dimostriamolo, scegliendo un altro punto Q' sull'asse e calcolando il momento rispetto all'asse per mezzo della definizione (3).

$$\vec{M}_{Q'} = \overrightarrow{Q'P}\times\vec{F} = (\overrightarrow{Q'Q}+\overrightarrow{QP})\times\vec{F} = \overrightarrow{Q'Q}\times\vec{F}+\overrightarrow{QP}\times\vec{F} = \overrightarrow{Q'Q}\times\vec{F}+\overrightarrow{M}_Q$$

$$M'_a = \vec{M}_{Q'}\cdot\vec{u}_a = \left(\overrightarrow{Q'Q}\times\vec{F}+\overrightarrow{M}_Q\right)\cdot\vec{u}_a =$$

$$= \left(\overrightarrow{Q'Q}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{u}_a + \overrightarrow{M}_Q\cdot\vec{u}_a = M_a$$



Infatti il "prodotto misto"

$$\left(\overrightarrow{Q'Q}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{u}_a = 0$$

poiché $\overrightarrow{Q'Q}$ ed $\vec{u}_a$ sono paralleli.

Proprietà del momento di una forza rispetto ad un asse:

(si ricavano direttamente dalla definizione (3))

a) il momento di una forza rispetto ad un asse è nullo se:

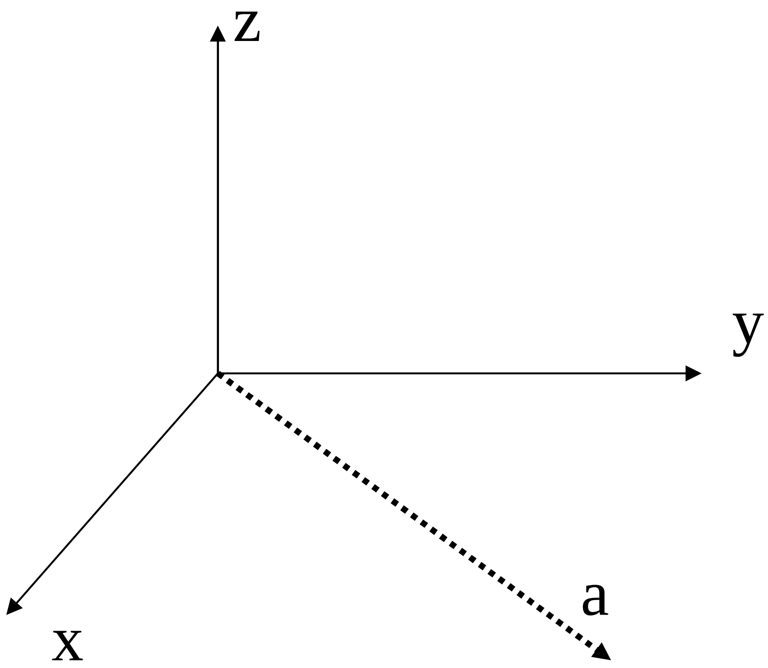
1) la forza è nulla
2) la retta d’azione della forza passa per l’asse
3) la forza e l’asse sono paralleli

b) la componente della forza nel piano trasverso all’asse è l’unica che contribuisce al momento della forza rispetto all’asse.

Le proprietà a_2) ed a_3) si possono enunciare insieme dicendo che per una forza non nulla “il momento rispetto ad un asse è nullo se forza ed asse giacciono in uno stesso piano”

b) è un ovvio corollario del precedente (o di a2) ed a3)).

Esercizio: data una forza F = (2N,-1N,3N) applicata nel punto P=(0m,1m,-2m), calcolare il momento rispetto alla bisettrice del piano xy orientata come mostrato in figura.



Suggerimento:

1) calcolare il versore dell'asse a

$$\vec{u}_a = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0 \right)$$

2) calcolare il momento di F rispetto al punto (0,0,0) o (1,1,0) dell'asse a: $\overrightarrow{M}_o = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{F}$

3) Calcolare: $M_a = \overrightarrow{M}_o \cdot \vec{u}_a$

Il risultato è: $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ Newton $\cdot$ metro