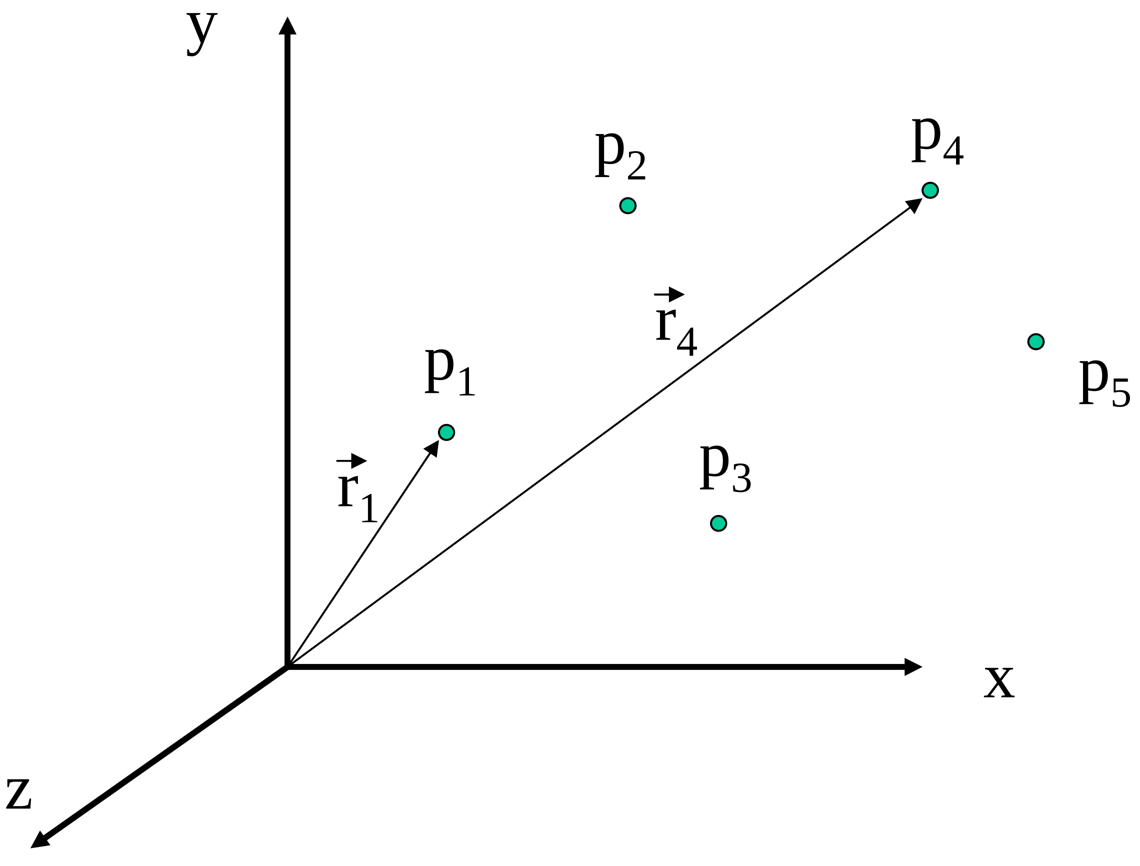
Sistema di punti materiali

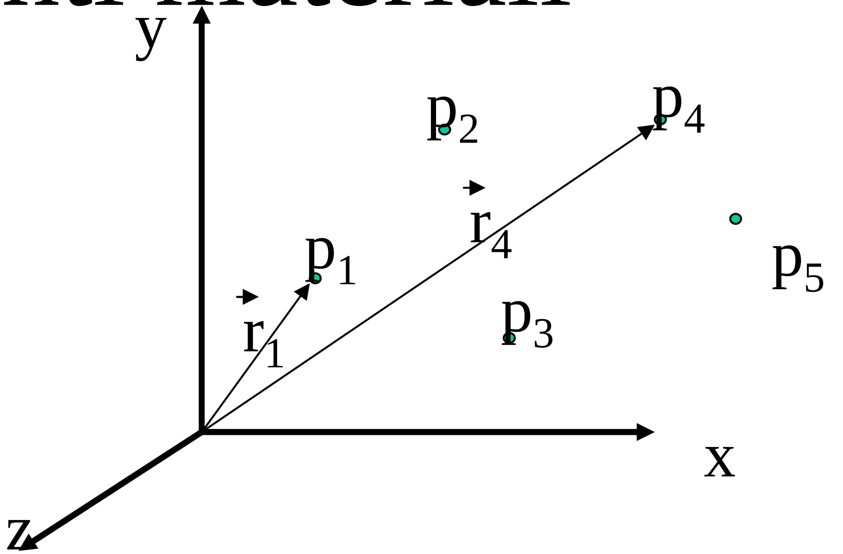
$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$



Sistema di punti materiali

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$



Centro di Massa

Primo caso: $m_1 = m_2 = m_3 = \ldots. = 1$ Kg

$$x_{CM} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

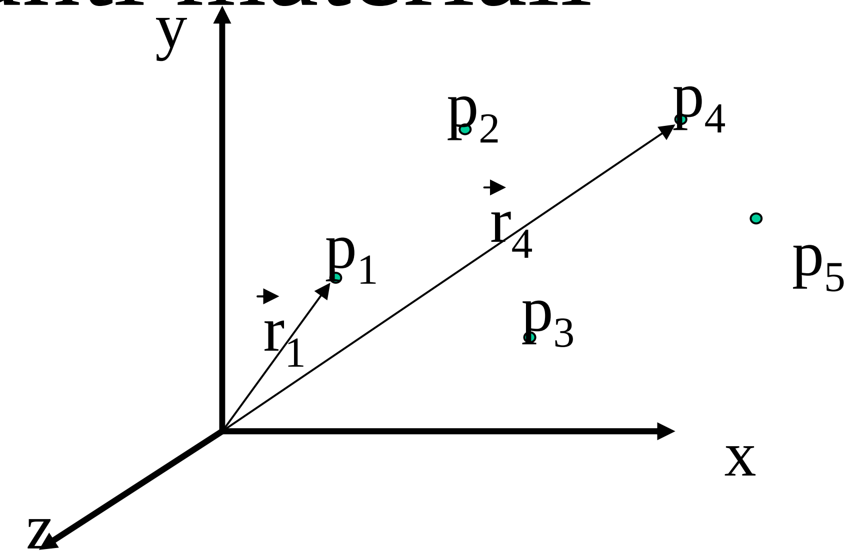
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \ldots\ldots + \vec{r}_n}{n}$$

$$y_{CM} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n}{n}$$

$$z_{CM} = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots\ldots + z_n}{n}$$

Sistema di punti materiali

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$



Centro di Massa

Caso generale

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \ldots\ldots. + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.m_n}$$

(1) $$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}}$$

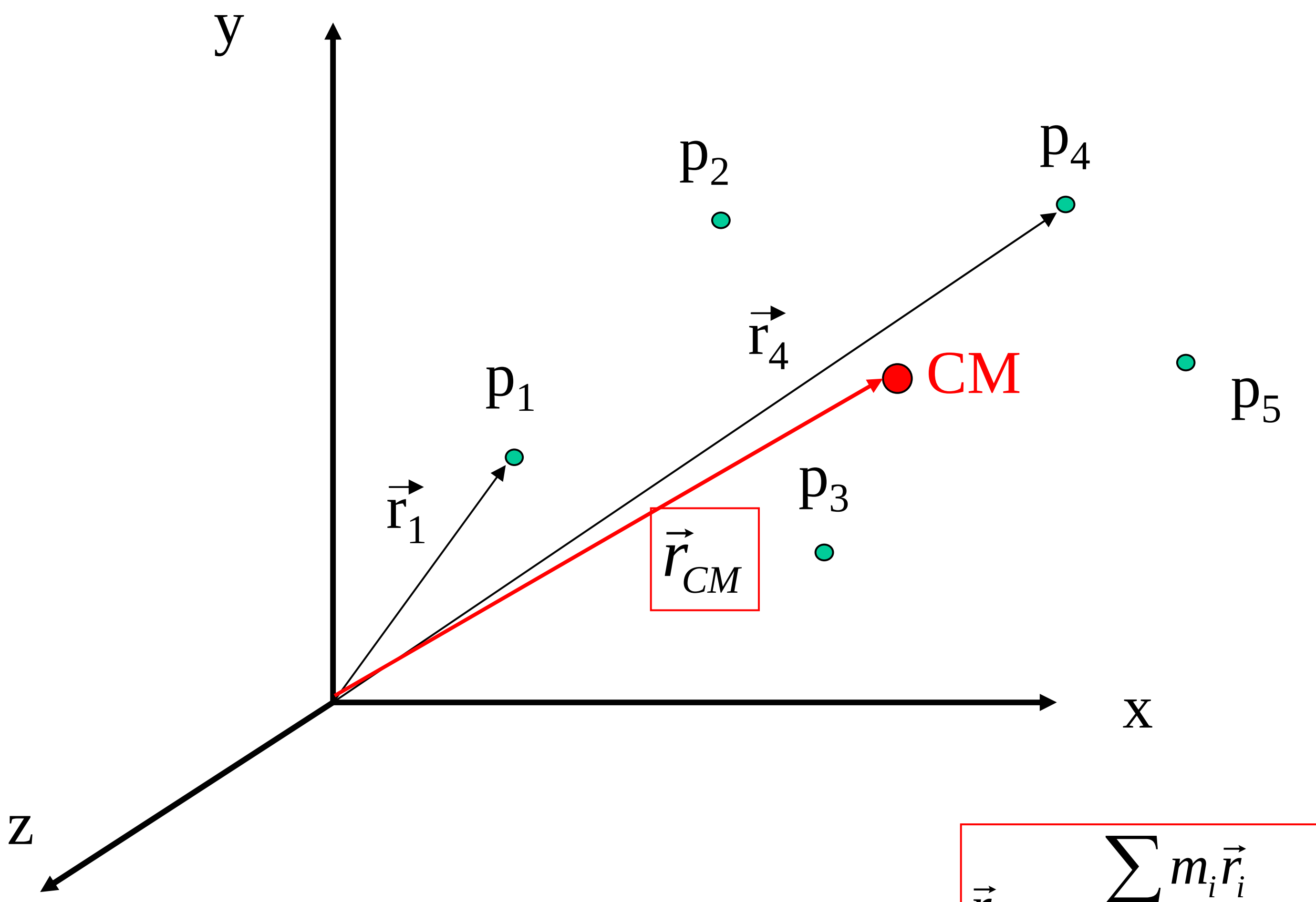
(in forma compatta)

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots\ldots. + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.m_n}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots\ldots. + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.m_n}$$

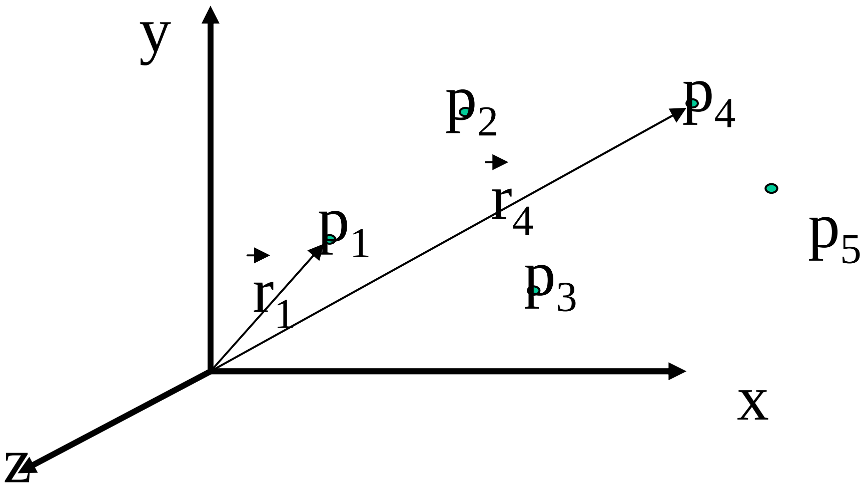
$$z_{CM} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \ldots\ldots. + m_nz_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots.m_n}$$

Sistema di punti materiali
CENTRO DI MASSA



$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m_{tot}}} \qquad (1)$$

Sistema di punti materiali
Quantità di moto

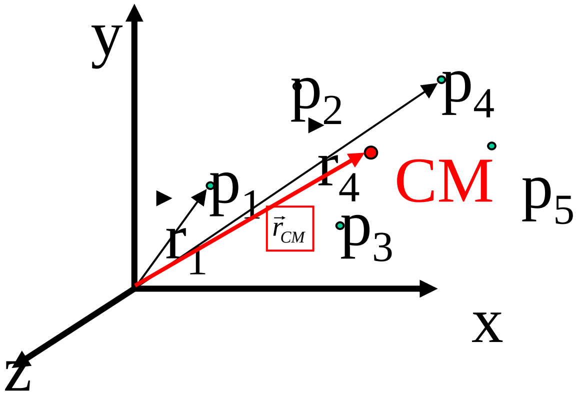


La quantità di moto di un sistema di punti materiali è definita come la somma delle quantità di moto dei singoli punti:

$$\boxed{\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots\ldots + \vec{p}_n = \sum \vec{p}_i} \qquad (2)$$

dove la quantità di moto di ciascun punto è $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

Sistema di punti materiali: Velocità del CENTRO DI MASSA



Per il punto "centro di massa" possiamo definire una velocità ed una accelerazione come fatto (per un qualisiasi punto) in cinematica:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{r}_{CM}^{\,fin} - \vec{r}_{CM}^{\,iniz}}{dt} =$$ (se dt→0, abbiamo la velocità istantanea)

$$\frac{1}{dt}\left[\frac{1}{m_{tot}}(m_1\vec{r}_1^{\,fin} + m_2\vec{r}_2^{\,fin} .... + m_n\vec{r}_n^{\,fin} - m_1\vec{r}_1^{\,iniz} - m_2\vec{r}_2^{\,iniz} .... - m_n\vec{r}_n^{\,iniz})\right] =$$

$$\frac{1}{m_{tot}}\left[\frac{m_1\vec{r}_1^{\,fin} - m_1\vec{r}_1^{\,iniz}}{dt} + \frac{m_2\vec{r}_2^{\,fin} - m_2\vec{r}_2^{\,iniz}}{dt} + ... + \frac{m_n\vec{r}_n^{\,fin} - m_n\vec{r}_n^{\,iniz}}{dt}\right]$$

Sistema di punti materiali: Velocità del CENTRO DI MASSA

…. da cui:

$$(3) \quad \vec{v}_{CM} = \frac{1}{m_{tot}}\left[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{v}_n\right] = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m_{tot}}$$

relazione formalmente identica a quella della definizione di centro di massa, ottenibile da (1) sostituendo r (posizione) con v (velocità)

Riscriviamo la (3) come: $m_{tot}\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{v}_n = \vec{p}_{tot}$

Ossia: (4) $\boxed{\vec{p}_{tot} = m_{tot}\vec{v}_{CM} \equiv \vec{p}_{CM}}$

La quantità di moto di un sistema di punti materiali è pari a quella che spetterebbe al Centro di Massa del sistema se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema

Sistema di punti materiali: accelerazione del CENTRO DI MASSA

In maniera del tutto analoga si ottiene l'espressione dell'accelerazione del centro di massa, a partire dalla definizione:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{v}_{CM}^{\,fin} - \vec{v}_{CM}^{\,iniz}}{dt} =$$

$$\frac{1}{dt}\left[\frac{1}{m_{tot}}\left(m_1\vec{v}_1^{\,fin} + m_2\vec{v}_2^{\,fin} \ldots\ldots + m_n\vec{v}_n^{\,fin} - m_1\vec{v}_1^{\,iniz} - m_2\vec{v}_2^{\,iniz} \ldots\ldots - m_n\vec{v}_n^{\,iniz}\right)\right] =$$

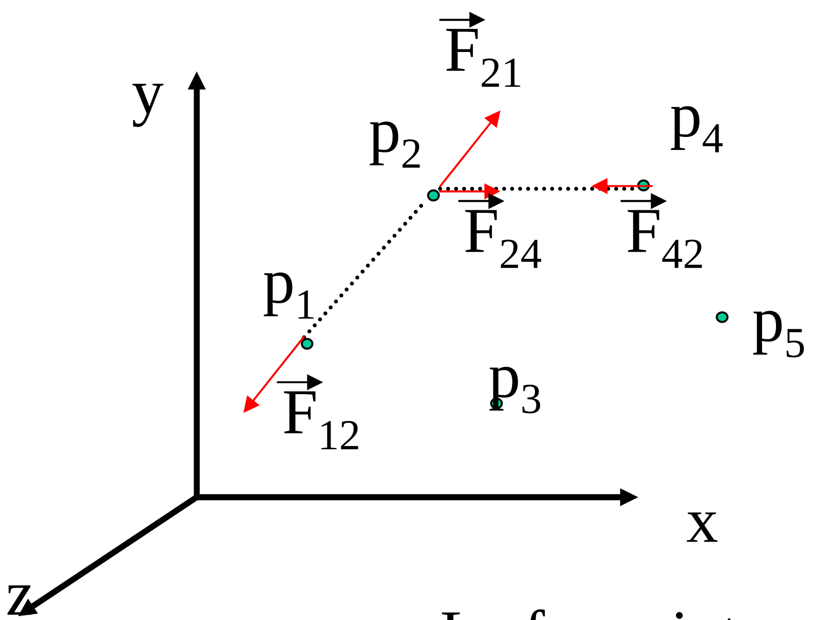
$$\frac{1}{m_{tot}}\left[\frac{m_1\vec{v}_1^{\,fin} - m_1\vec{v}_1^{\,iniz}}{dt} + \frac{m_2\vec{v}_2^{\,fin} - m_2\vec{v}_2^{\,iniz}}{dt} + \ldots\ldots + \frac{m_n\vec{v}_n^{\,fin} - m_n\vec{v}_n^{\,iniz}}{dt}\right]$$

$$(5) \quad \boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{v}_{CM}^{\,fin} - \vec{v}_{CM}^{\,iniz}}{dt} = \frac{1}{m_{tot}}\left[m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots\ldots + m_n\vec{a}_n\right] = \frac{\sum m_i\vec{a}_i}{m_{tot}}}$$

Teorema del moto del centro di massa

Dividiamo le forze applicate ai punti materiali del sistema in due classi:
1) Forze interne al sistema (F_{ij})   e   2) Forze esterne (F^{est}_i)

Consideriamo prima le forze interne:



Per il Terzo Principio della dinamica:

$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ $\vec{F}_{32} = -\vec{F}_{23}$
$\vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31}$ $\vec{F}_{34} = -\vec{F}_{43}$
$\vec{F}_{14} = -\vec{F}_{41}$ $\vec{F}_{35} = -\vec{F}_{53}$

....

Le forze interne sono a due a due uguali ed opposte !

Teorema del moto del centro di massa

Scriviamo la 2° legge della dinamica per ciascun punto materiale costituente il sistema

$$\begin{cases} \vec{F}_1^{\,tot} = m\vec{a}_1 \\ \vec{F}_2^{\,tot} = m\vec{a}_2 \\ \ldots \\ \vec{F}_n^{\,tot} = m\vec{a}_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_1^{\,est} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots. + \vec{F}_{1n} = m\vec{a}_1 = \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} \\ \vec{F}_2^{\,est} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots. + \vec{F}_{2n} = m\vec{a}_2 = \dfrac{d\vec{p}_2}{dt} \\ \ldots \\ \vec{F}_n^{\,est} + \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \ldots. + \vec{F}_{n\,n-1} = m\vec{a}_n = \dfrac{d\vec{p}_n}{dt} \end{cases}$$

sommando membro a membro le n equazioni del sistema, ricordando che le forze interne sono a due a due uguali ed opposte, si ottiene:

$$\vec{F}_{tot}^{est} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots.. + m_n\vec{a}_n = \sum m_i\vec{a}_i = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

dove $\vec{F}_{tot}^{est} = \vec{F}_1^{est} + \vec{F}_2^{est} + \ldots.. + \vec{F}_n^{est} = \sum \vec{F}_i^{est}$

Teorema del moto del centro di massa

$$\vec{F}_{tot}^{est} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{\vec{p}_1^{\,fin} - \vec{p}_1^{\,iniz} + \vec{p}_2^{\,fin} - \vec{p}_2^{\,iniz} + \ldots\ldots + \vec{p}_n^{\,fin} - \vec{p}_n^{\,iniz}}{dt} =$$

$$= \frac{\vec{p}_{tot}^{\,fin} - \vec{p}_{tot}^{\,iniz}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

Pertanto: (6) $\boxed{\vec{F}_{tot}^{est} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}}$

od in maniera equivalente: (6') $\boxed{\vec{F}_{tot}^{est} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}}$

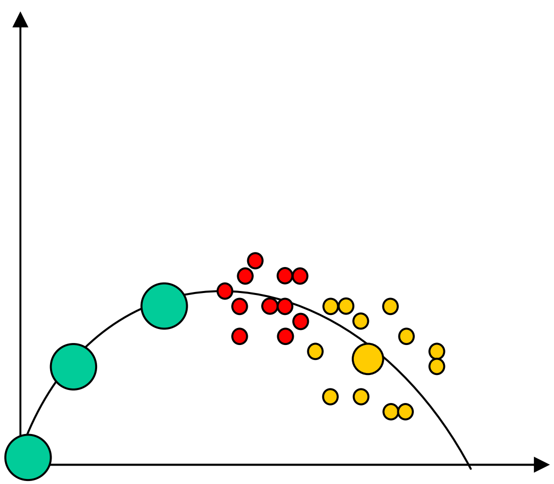
oppure ancora: (6'') $\boxed{\vec{F}_{tot}^{est} = m\vec{a}_{CM}}$

attribuendo al centro di massa tutta la massa del sistema

Teorema del moto del centro di massa

Le equazioni (6’) o (6’’) ci dicono che, se attribuiamo al centro di massa tutta la massa del sistema, la dinamica di questo punto è governata dalla 2° legge di Newton, scritta considerando solo le forze esterne (tutte) ed ignorando le forze interne.

$$\boxed{\vec{F}_{tot}^{\,est} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{tot}^{\,est} = m\vec{a}_{CM}}$$



Ad esempio, il moto del centro di massa di una palla di cannone che esplode a metà della sua traiettoria è sempre parabolico, anche dopo l’esplosione.

Teorema di conservazione della quantità di moto

L'equazione (6) è particolarmente utile quando la risultante delle forze esterne è nulla. Ad esempio, per un sistema isolato, ciascuna delle Forze esterne è nulla ($F^{est}_1 = F^{est}_2 = \ldots = F^{est}_n = 0$).

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{tot} = \text{costante}}$$

In un sistema isolato, od un sistema tale che la risultante delle forze esterne sia nulla, la quantità di moto si conserva.

Per le applicazioni e gli esercizi, fare riferimento al libro di testo ed agli appunti delle lezioni.