Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione in c.a. Partitore resistivo-capacitivo

Partitore resistivo: abbiamo visto che in regime di corrente continua il rapporto di partizione è costante:

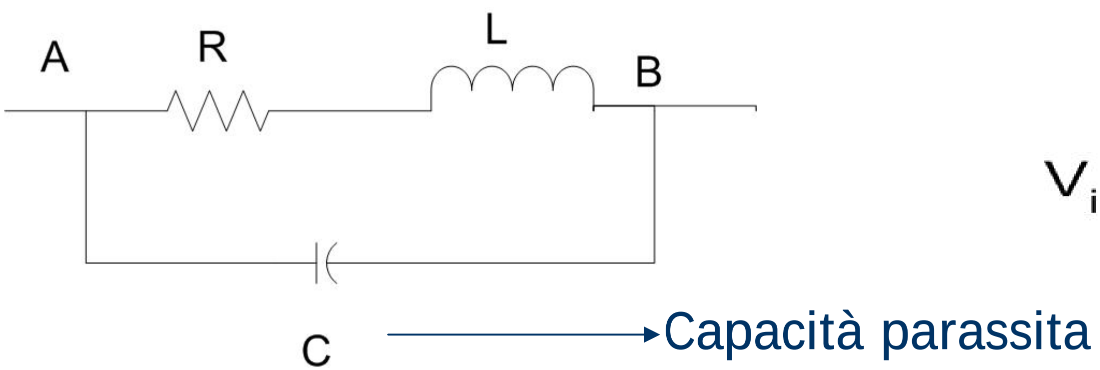
$V_u/V_i = R_2/(R_1+R_2)$

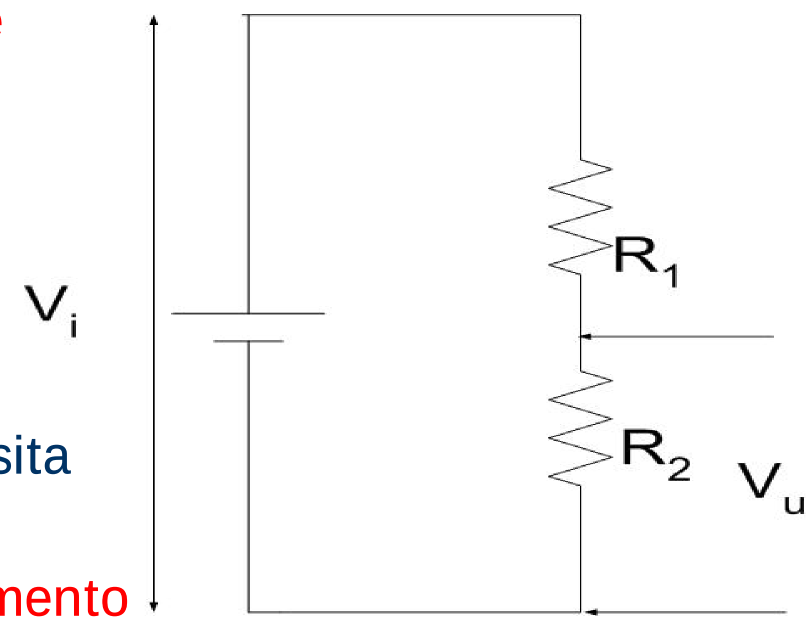
dove V_u è la ddp ai capi di R_2 e V_i è la ddp ai capi del generatore.

Quando è alimentato in alternata la funzione di trasferimento assume ancora un valore costante poiché le impedenze complesse Z sono puramente resistive e quindi sono numeri reali e Z = R (non dipendono dalla frequenza)

$\mathbf{A} = \mathbf{V_u/V_i} = Z_2/(Z_1 + Z_2) = R_2/(R_1+R_2)$

Tuttavia in alternata lo schema equivalente di una resistenza è:

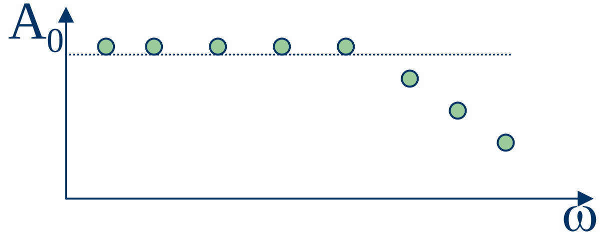


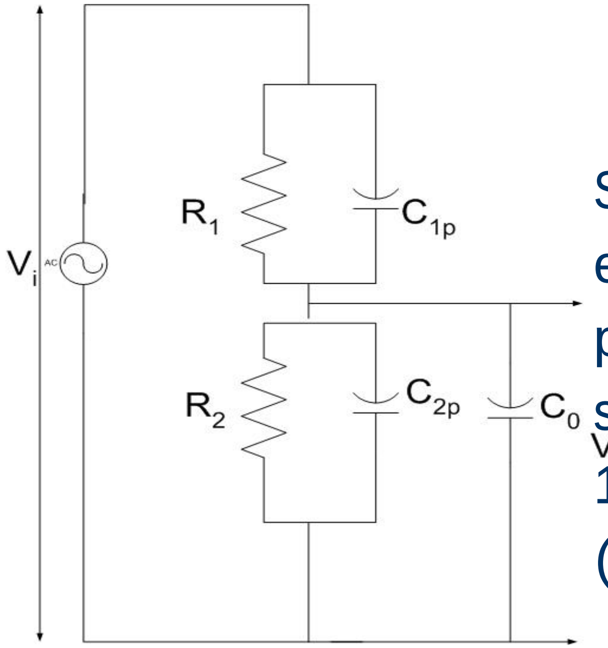


Quindi ci si aspetta che la funzione di trasferimento dipenda dalla frequenza

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Si consideri inoltre che anche se il circuito fosse costituito da resistenze ‘ideali’, l’oscilloscopio stesso e le sonde presentano capacità non nulle e quindi la funzione di trasferimento dipenderebbe comunque da ω.
Nel caso reale, trascurando l’induttanza associata alle resistenze, considereremo la loro capacità parassita.





Si ha: $1/Z_1 = 1/R_1 + 1/[1/(j\omega C_{1p})] = (1 + j\omega R_1 C_{1p})/R_1$

e, chiamata $C_2 = C_{2p} + C_0$ il parallelo tra la capacità parassita di R_2 e quella di oscilloscopio e sonde C_0, si ha:

$1/Z_2 = 1/R_2 + 1/[1/(j\omega C_{2p})] + 1/[1/(j\omega C_0)] = (1 + j\omega R_2 C_2)/R_2$. Quindi:

$\mathbf{A} = 1/(1+Z_1/Z_2) =$

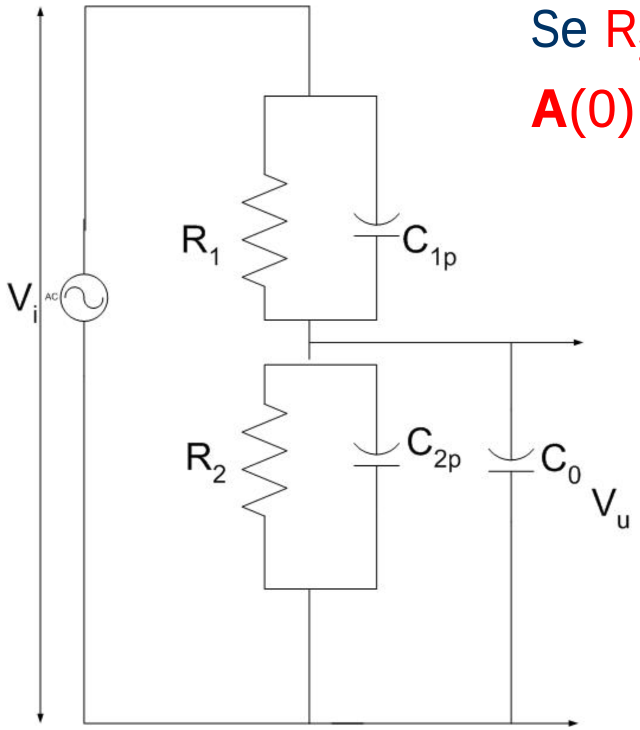
$= 1/[1 + (1 + j\omega R_2 C_2)/ (1 + j\omega R_1 C_{1p}) \times R_1/R_2]$

da cui si evince la dipendenza da ω. Il partitore si dice compensato se il rapporto di partizione è indipendente dalla frequenza, cosa che accade se $R_2 C_2 = R_1 C_{1p}$

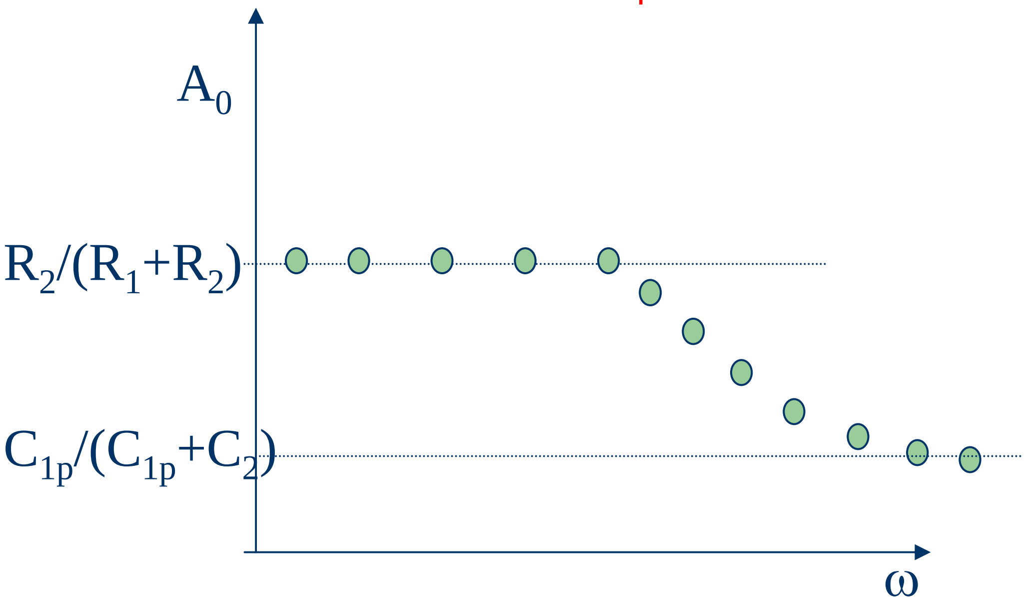
Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Trasformando ulteriormente $\mathbf{A} = 1/[1+(1+j\omega R_2C_2)/(1+j\omega R_1C_{1p})\times R_1/R_2] =$
$= R_2/(R_1+R_2)\times(1+j\omega R_1C_{1p})/(1+j\omega R_TC_T)$ con $R_T = R_1R_2/(R_1+R_2)$ e $C_T = C_{1p}+C_2$
Poiché $C_T>C_{1p} \Rightarrow (1+j\omega R_1C_{1p})/(1+j\omega R_TC_T)<1$ e quindi all'aumentare della frequenza **A** diminuisce (ovvero $\mathbf{V_u}$ diminuisce se $\mathbf{V_i}$ è fisso). Si noti inoltre:

- Per $\omega\to 0$ il circuito si comporta come un partitore resistivo: $\mathbf{A}(0) \to R_2/(R_1+R_2)$
- Per $\omega\to\infty$ si comporta come un partitore capacitivo: $\mathbf{A}(\infty) \to C_{1p}/(C_{1p}+C_2)$



Se $R_2C_2 = R_1C_{1p} \Rightarrow C_2/C_{1p} = R_1/R_2 \Rightarrow$
$\mathbf{A}(0) = 1/(1+R_1/R_2) = 1/(1+C_2/C_{1p}) = \mathbf{A}(\infty)$



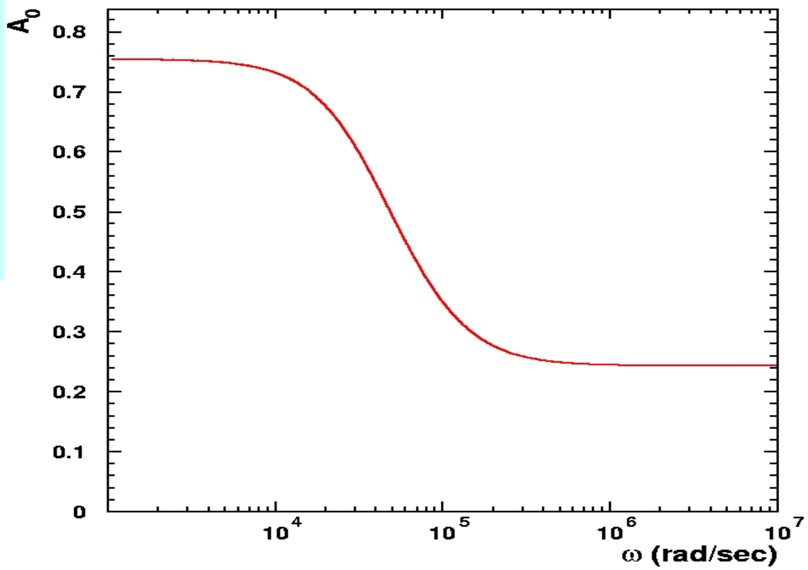
Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

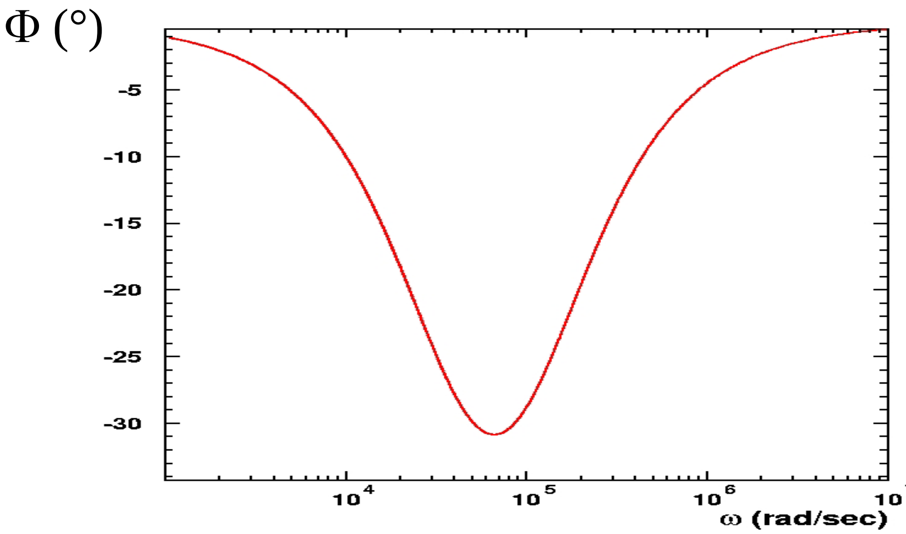
$\mathbf{A} = A_0\, e^{j\Phi} = R_2/(R_1+R_2)\times(1+j\omega R_1C_{1p})/(1+j\omega R_TC_T)$

$$A_0 = R_2/(R_1+R_2)\times\sqrt{\frac{\left[1+(\omega R_1C_{1p})^2\right]}{\left[1+(\omega R_TC_T)^2\right]}}$$

$\Phi = \mathrm{atan}(\omega R_1C_{1p}) - \mathrm{atan}(\omega R_TC_T)$ (infatti per i numeri complessi vale la regola che l'argomento di un prodotto è uguale alla somma degli argomenti)

Es. per $R_1 = 3.9\ k\Omega$, $C_1 = 2.2\ nF$, $R_2 = 12k\Omega$, $C_2 = 6.8\ nF \Rightarrow R_T=R_1R_2/(R_1+R_2)$ $C_T = C_1+C_2 \Rightarrow \omega_1=1/(R_1C_1) = 1.17\cdot 10^5$ rad/s e $\omega_2=1/(R_TC_T) = 3.77\cdot 10^4$ rad/s





L'andamento di **A** può essere studiato attraverso il diagramma di Bode che consente di visualizzare in funzione di $\log_{10}\omega$ l'andamento di una funzione complessa scomponendola in fattori che asintoticamente sono delle rette.

Si impiegano 2 diagrammi: il diagramma delle ampiezze in cui si rappresenta il guadagno logaritmico e quello delle fasi dove la fase è l'argomento della funzione di trasferimento $\Phi = \arg(\mathbf{A})$ (in gradi o radianti).

Il guadagno logaritmico in Bel è: $G = \log_{10}|P_u/P_i| = \log_{10}|V_u/V_i|^2$ dove con P si indicano le potenze e quindi in decibel:

$G = 20 \log_{10}|\mathbf{A}|$. Questa rappresentazione logaritmica offre il vantaggio di sommare i diagrammi relativi ai fattori di un prodotto.

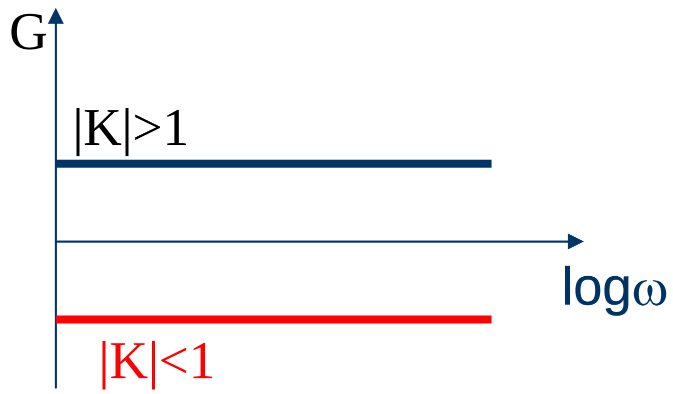
Per le 2 rappresentazioni si usano fogli in carta semilogaritmica.

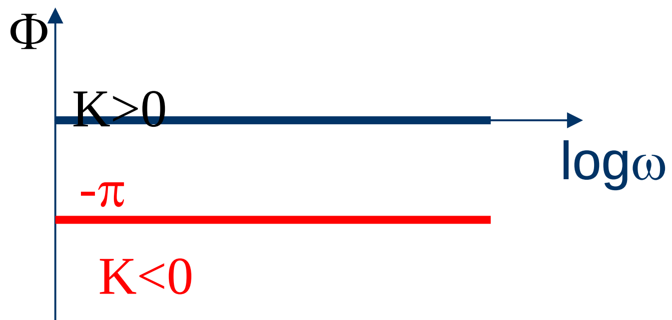
La funzione di trasferimento contiene diversi 'termini tipici'. Ne consideriamo alcuni:

1) Termine costante: $K \Rightarrow G = 20\log_{10}|K|$: il diagramma di ampiezza è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ascisse nel semipiano positivo dell'asse delle ordinate se $|K|>1$, negativo se $|K|<1$;

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

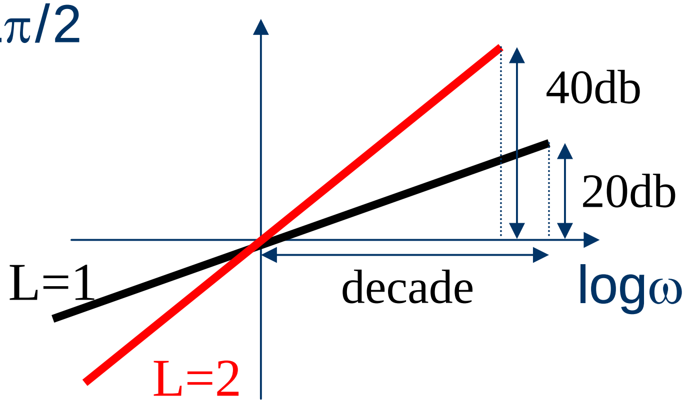
il diagramma delle fasi è identicamente nullo se K >0 e uguale a $-\pi$ se K<0.

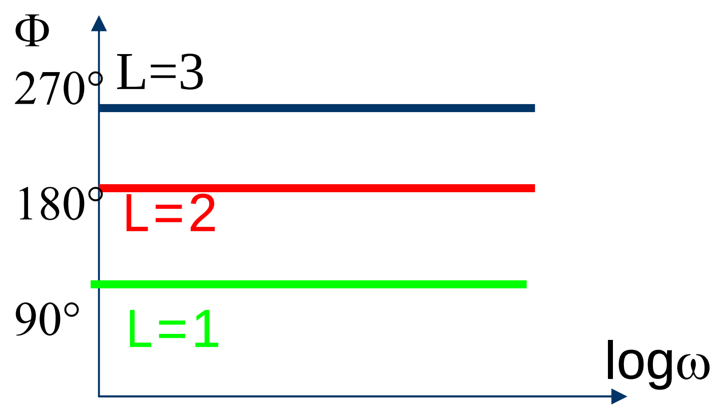




2) Zero (polo) in "origine": $(j\omega)^L$ se L >0 (L <0)

$\log (j\omega)^L = L \log\omega + jL\pi/2 \Rightarrow$ si ottiene una retta per l'origine dell'asse logω con pendenza positiva per L>0 (20db/decade per L =1; 40 db/decade per L=2,...) e negativa per L <0 e il diagramma delle fasi è identicamente pari a $L\pi/2$





Esperienza n. 9 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

3) zero: $(1+ j\omega/\omega_z)$

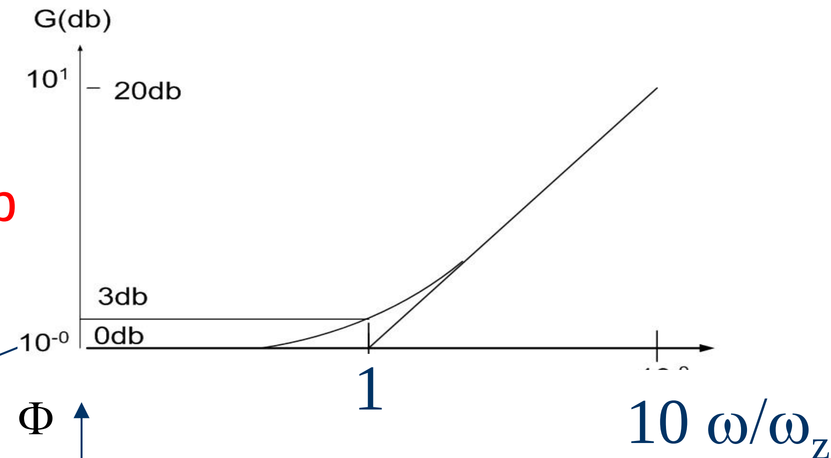
$G = 20 \log_{10}| 1+j\omega/\omega_z| = 20 \log_{10} \sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_z^2}}$

Per $\omega<<|\omega_z|$ $G\rightarrow 0$ e per $\omega>>|\omega_z|$ $G\rightarrow 20\log_{10}\omega - 20\log_{10}|\omega_z|$

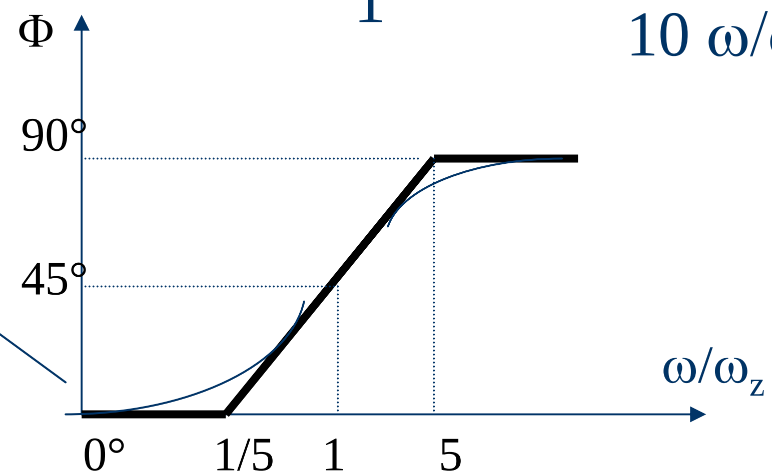
Questi 2 andamenti approssimati sono rappresentati da un tratto dell'asse delle ascisse e da una retta con pendenza di 20 db/decade. Essi sono gli asintoti alla effettiva curva di guadagno logaritmico. I 2 asintoti si incontrano in $\omega=|\omega_z|$ dove si ha

$G = 20 \log_{10}| 1+j\omega_z/\omega_z| = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3db$

Generalmente l'andamento di G è ben riprodotto dai 2 asintoti considerando la correzione di 3db in $\omega=|\omega_z|$



Rappresentazione di Bode: diagramma dell'ampiezza e della fase

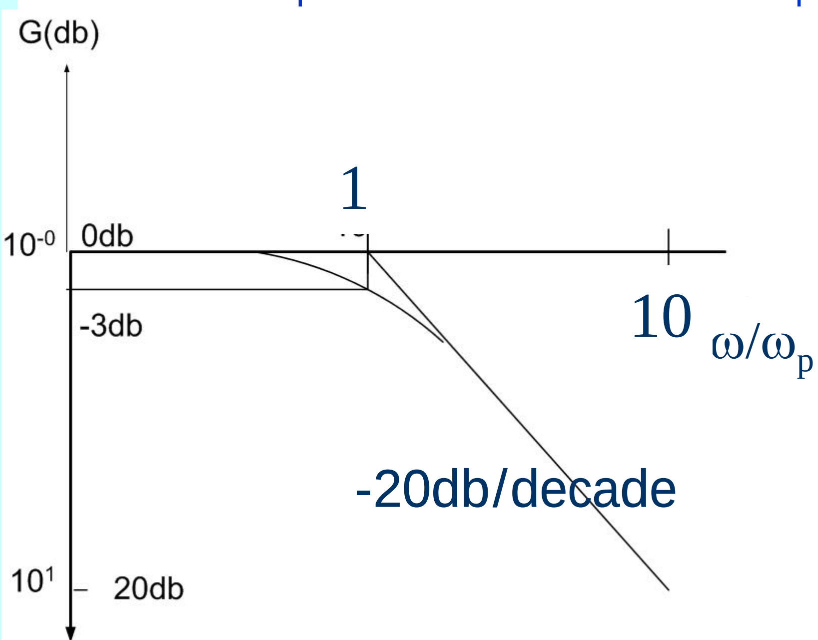


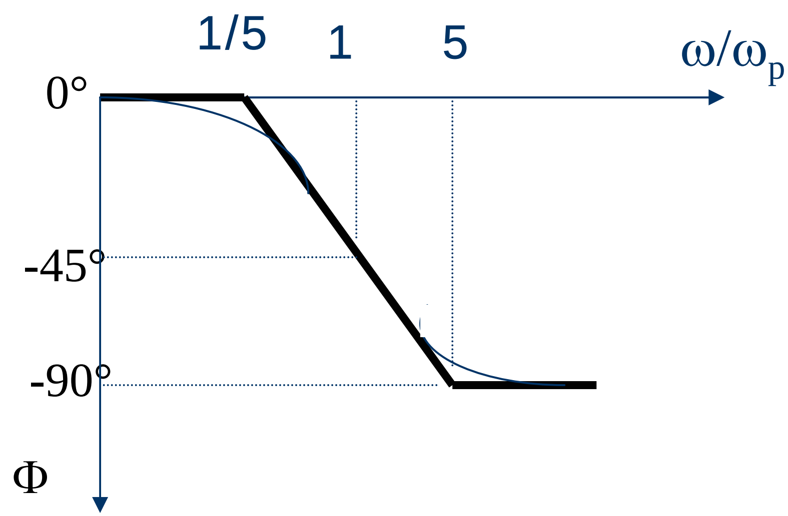
Esperienza n. 9 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Polo: $(1+j\omega/\omega_p)^{-1}$

$G = 20 \log_{10} |(1+j\omega/\omega_p)^{-1}| = -20 \log_{10}|1+j\omega/\omega_p| = -20 \log_{10} \sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_p^2}}$

Per $\omega<<|\omega_p|$ $G\rightarrow 0$ e per $\omega>>|\omega_p|$ $G\rightarrow -20\log_{10}\omega + 20\log_{10}|\omega_p|$





Rappresentazione di Bode
del diagramma delle ampiezza e della fase

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Tornando al partitore resistivo-capacitivo:

$G = 20 \log_{10}|\mathbf{A}| = 20 \log_{10}|R_2/(R_1+R_2)|+20 \log_{10}|1+j\omega R_1C_{1p}|+$
$20 \log_{10}|(1+j\omega R_TC_T)^{-1}|$

- Il 1° termine è costante: $G_1 = 20 \log_{10}|R_2/(R_1+R_2)|$ con $R_2/(R_1+R_2)<1 \Rightarrow$

è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ascisse nel semipiano negativo dell'asse delle ordinate;

- Il 2° termine $G_2 = 20 \log_{10}|1+j\omega R_1C_{1p}|=20 \log_{10} \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2}$ è uno zero in

$\omega_z = 1/(R_1C_{1p})$.

Se $\omega \ll \omega_z \Rightarrow G_2 \rightarrow 0$

Se $\omega \gg \omega_z \Rightarrow G_2 \rightarrow 20 \log_{10}\omega - 20 \log_{10}\omega_z$ che in funzione di $\log_{10}\omega$ è una retta di pendenza 20 db/decade

- Il 3° termine $G_3 = |(1+j\omega R_TC_T)^{-1}|= -20 \log_{10} \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}$ è un polo in

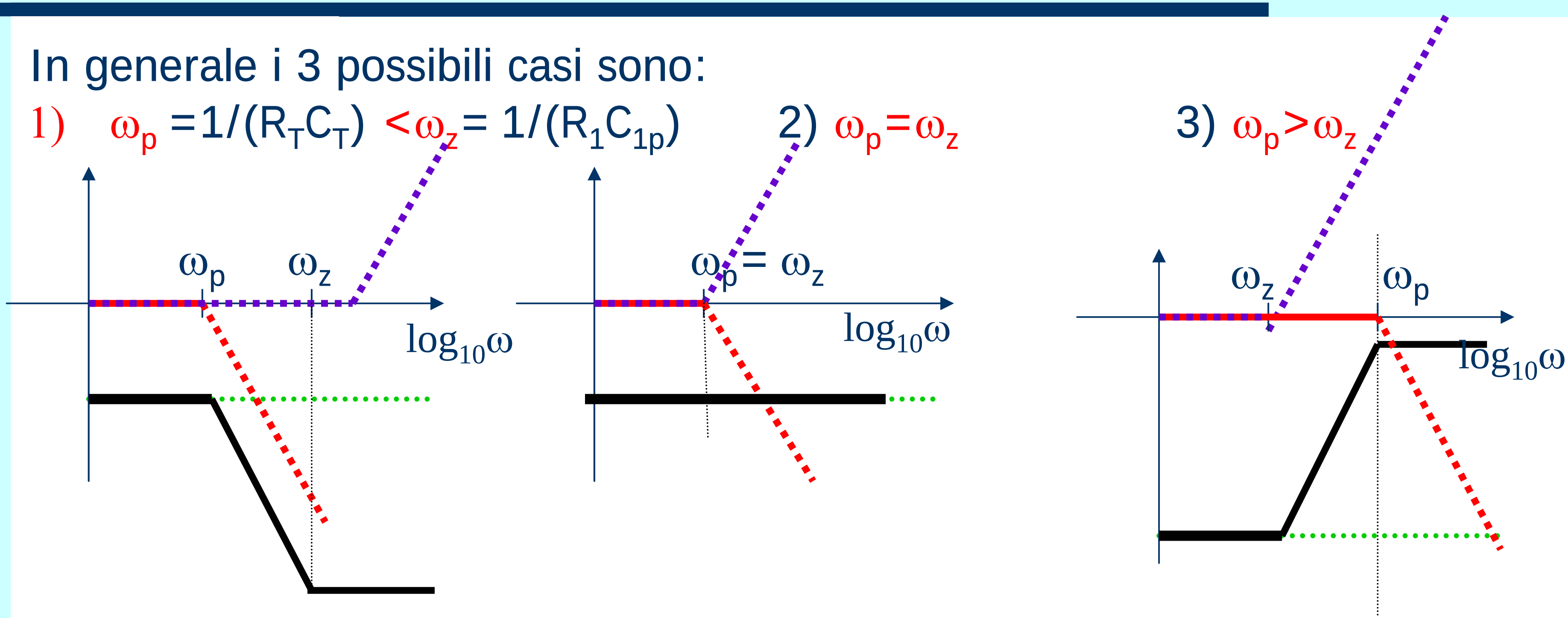
$\omega_p = 1/(R_TC_T)$. Se $\omega \ll \omega_p \Rightarrow G_3 \rightarrow 0$ e se $\omega \gg \omega_p \Rightarrow G_3 \rightarrow -20 \log_{10}\omega +$
$20 \log_{10}\omega_p$

che in funzione di $\log_{10}\omega$ è una retta di pendenza -20 db/decade

Partitore resistivo capacitivo

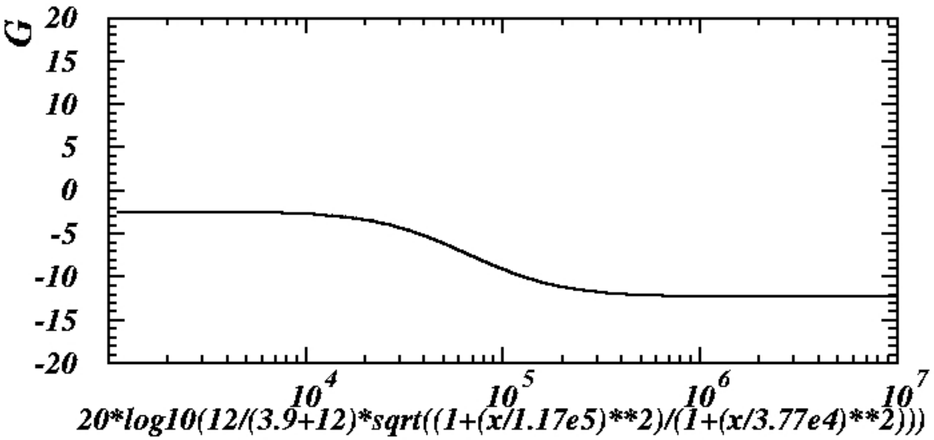
In generale i 3 possibili casi sono:

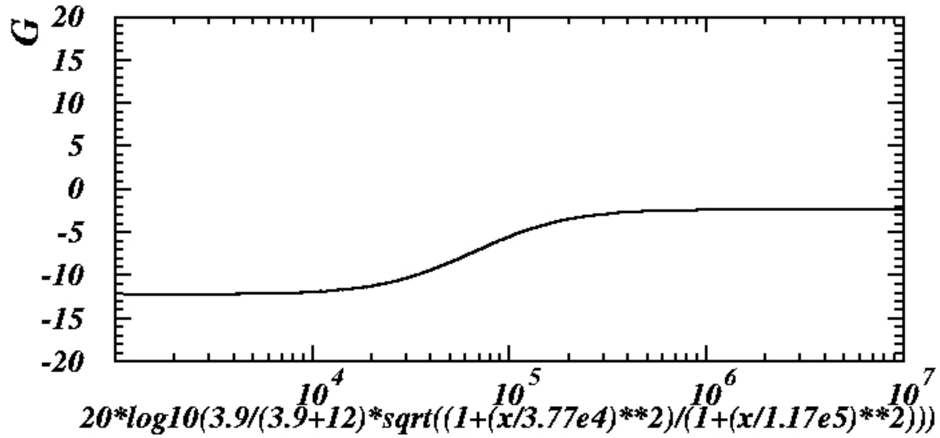
1) $\omega_p = 1/(R_T C_T) < \omega_z = 1/(R_1 C_{1p})$ 2) $\omega_p = \omega_z$ 3) $\omega_p > \omega_z$

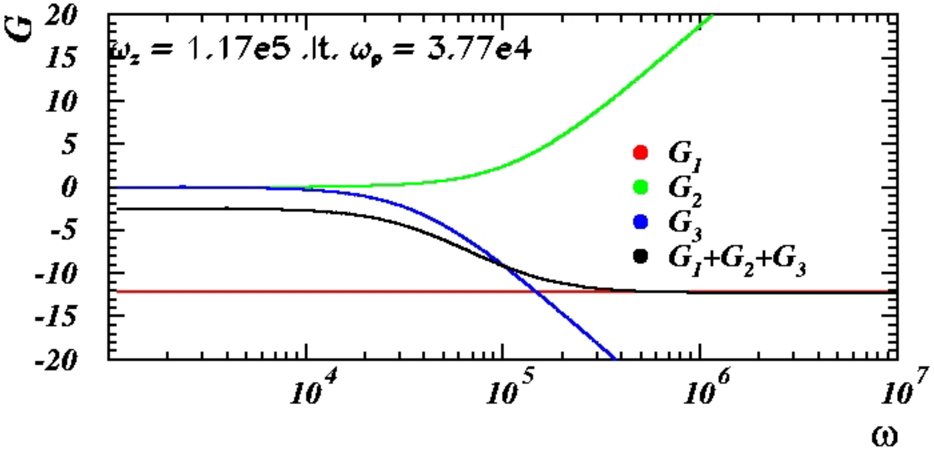


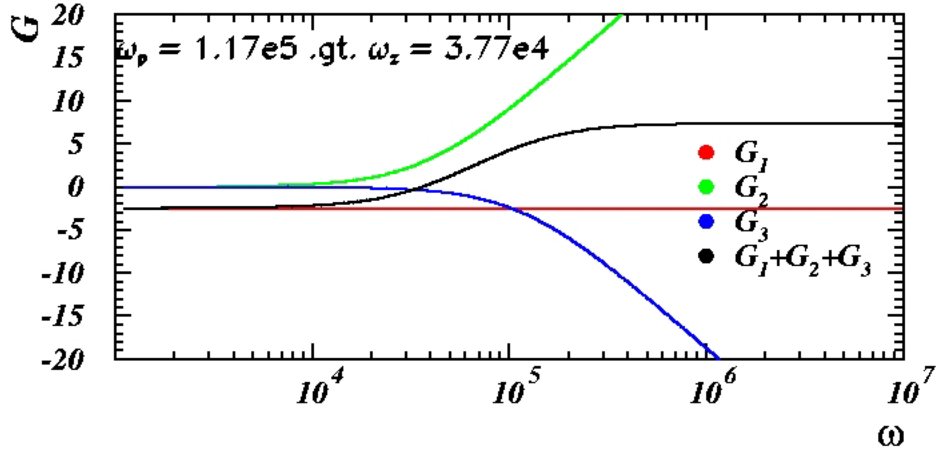
Nel caso della nostra esperienza, poiché $C_T > C_{1p}$ e le resistenze sono fisse, si ricade nel caso 1) $\omega_p < \omega_z$

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo









$\omega_z < \omega_p$

$\omega_z > \omega_p$

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Sfasamento: Φ = arg(A) = arg[$R_2/(R_1+R_2)\times(1+j\omega R_1C_{1p})/(1+j\omega R_TC_T)$]

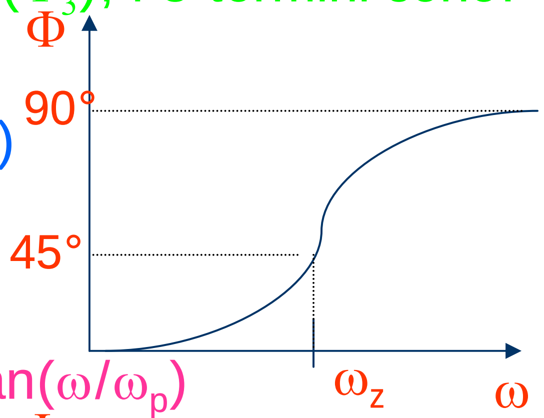
Poiché l'argomento di un prodotto di numeri complessi è pari alla somma dei singoli fattori arg(Φ_1 Φ_2 Φ_3)= arg(Φ_1)+ arg(Φ_2)+arg(Φ_3), i 3 termini sono:

1) Φ_1 = arg[$R_2/(R_1+R_2)$] = 0

2) Φ_2 = arg[$1+j\omega R_1C_{1p}$]= arg[$1+j\omega/\omega_z$]=atan(ω/ω_z)

Per $\omega\to 0 \Rightarrow \Phi_2 \to 0$ Per $\omega=\omega_z \Rightarrow \Phi_2$ = 45°

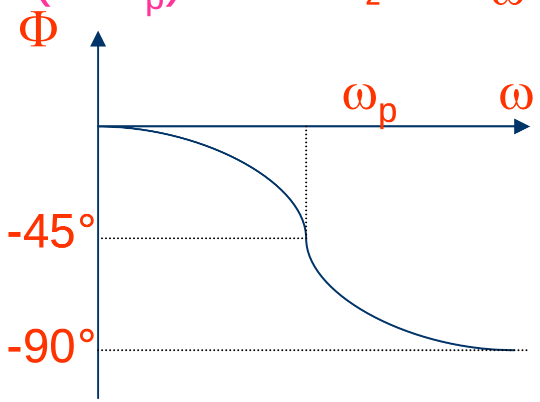
Per $\omega\to\infty \Rightarrow \Phi_2 \to 90°$

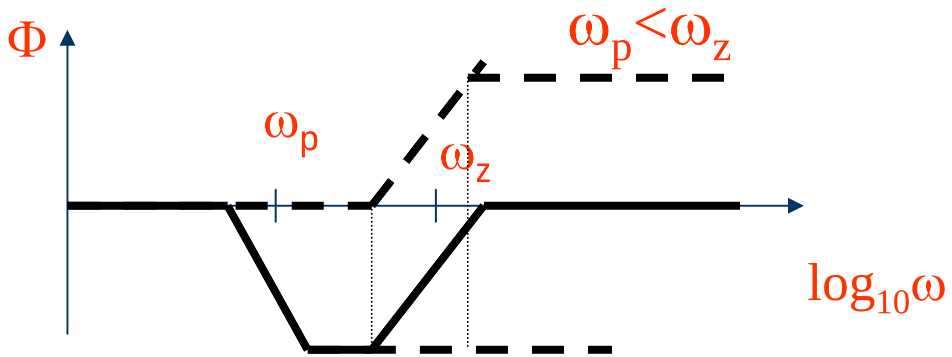


3) Φ_3 = arg[$(1+j\omega R_TC_T)^{-1}$]= arg[$1/(1+j\omega/\omega_p)$]=-atan(ω/ω_p)

Per $\omega\to 0 \Rightarrow \Phi_3 \to 0$ Per $\omega=\omega_z \Rightarrow \Phi_3$ = -45°

Per $\omega\to\infty \Rightarrow \Phi_3 \to -90°$





Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Strumentazione: generatore di forme d'onda, oscilloscopio con capacità di ingresso di 35 pF, 2 sonde di capacità ~100 pF, breadbord, cavi di collegamento ed i seguenti componenti dei circuiti da realizzare:

- Per il partitore resistivo: $R_1 = R_2 = 100\ k\Omega$
- condensatori da porre in parallelo ad R_1 al fine di trovare la condizione di compensazione del partitore (22 pF, 56 pF, 82 pF, 100 pF, 150 pF, 220 pF)
- Per il partitore resistivo-capacitivo: $R_1 = 3.9\ k\Omega$ e $R_2 = 12\ k\Omega$ e $C_1 = 2.2$ nF e $C_2 = 6.8$ nF

Si considerino le tolleranze dei condensatori 10% e si valutino le tolleranze delle resistenze

Visualizzare il segnale di ingresso e di uscita (ai capi di R_2) sui canali A e B e fissare l'ampiezza del segnale di ingresso a 2 V (picco-picco), uscita 50 Ω .

L'esperienza si realizza in 4 fasi:

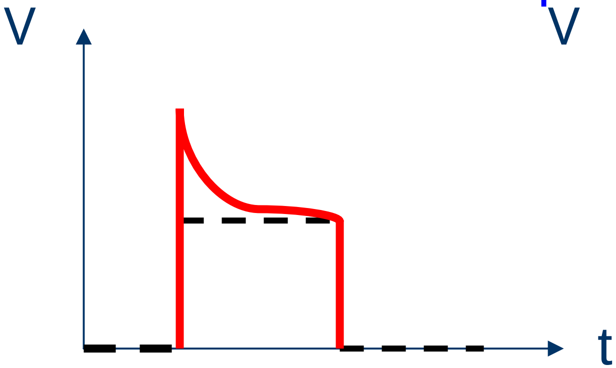
1) si verifichi che per il partitore resistivo ($R_1 = R_2 = 100\ k\Omega$) il rapporto di partizione è costante per basse frequenze e che diminuisce all'aumentare della frequenza

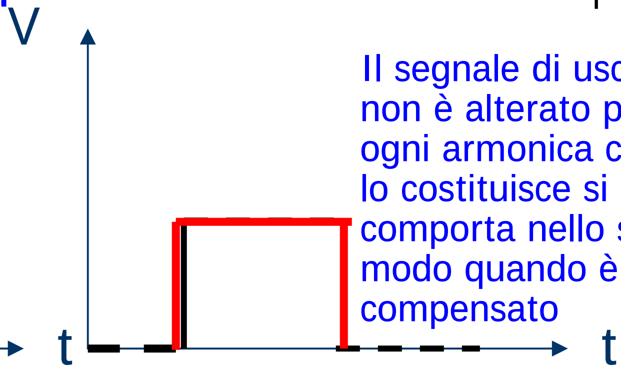
T(msec)	f.s. (msec)	ν(Hz)	V_i (Volt)	f.s. (Volt)	V_u (Volt)	f.s. (Volt)	A
		100Hz-1MHz					

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

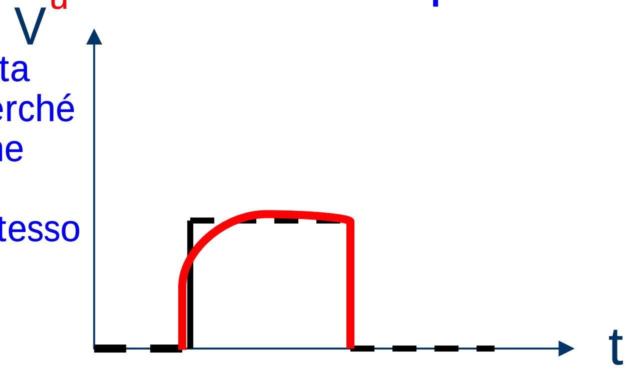
2) Si individua per tentativi la condizione di partitore compensato $R_T C_T = R_1 C_{1p}$ inserendo in parallelo a R_1 diversi condensatori e osservando la risposta del circuito utilizzando un segnale di tipo onda quadra.

Le 3 condizioni che si presentano osservando V_i e V_u con l'oscilloscopio sono:





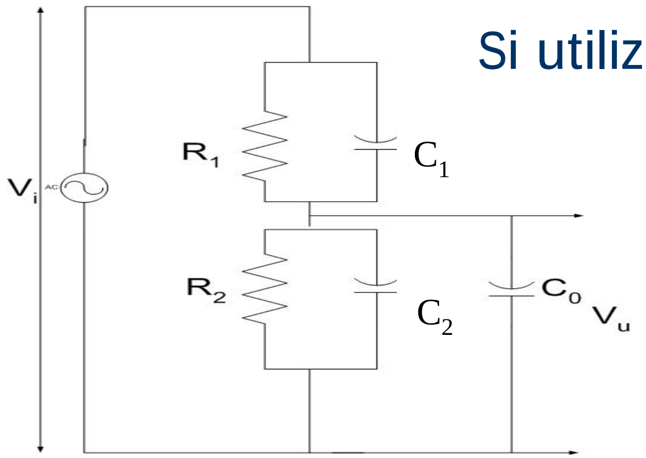
Il segnale di uscita non è alterato perché ogni armonica che lo costituisce si comporta nello stesso modo quando è compensato



Partitore sovracompensato (sono soppresse le alte frequenze)

Partitore compensato

Partitore sottcompensato (sono soppresse le basse frequenze)



Si utilizzino scale diverse per osservare V_i e V_u ~$1/2\ V_i$

3) Si realizza un partitore resistivo-capacitivo con C_1 e $C_2 >> C_{parassite} \Rightarrow$ le capacità parassite sono trascurabili

Si confrontano le misure con i diagrammi di Bode attesi e si esegua il test del χ^2

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Tabella dei dati (quantità misurate in rosso, calcolate in verde e teoriche in celeste):

T (μsec)	ν (Hz)	ω (rad/s)	V_i (Volt)	V_u (Volt)	A_{mis}	A_{atteso}	Δt (μsec)	Φ_{mis} (°)	Φ_{atteso} (°)
	100Hz-10MHz								

Si osservi che il partitore non è compensato poiché

$R_1C_1=3.9\cdot10^3*2.2\cdot10^{-9} = 8.58\cdot10^{-6} \neq R_2C_2 = 12\cdot10^3*6.8\cdot10^{-9} = 81.6\cdot10^{-6}$

4) Si invertono i condensatori nel circuito che quindi risulta compensato:

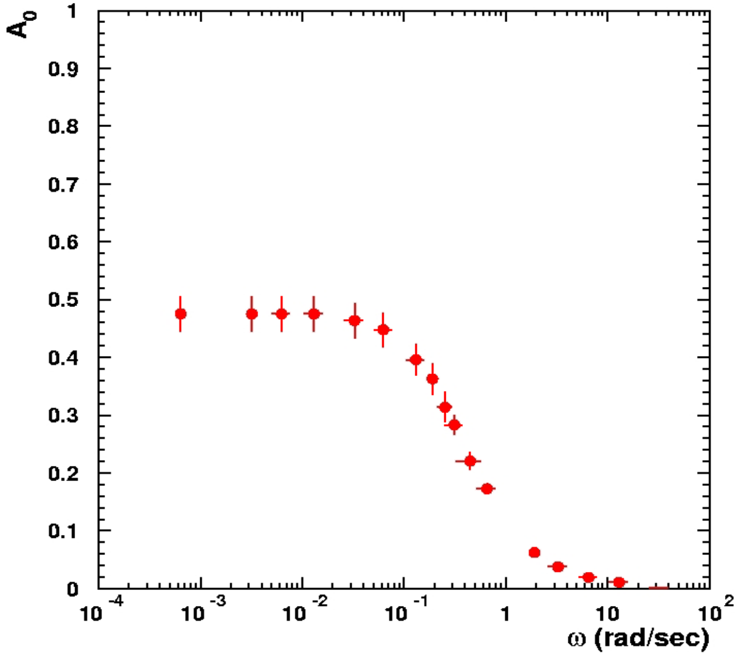
$R_1C_2= 3.9\cdot10^3*6.8\cdot10^{-9} = 26.5\cdot10^{-6} \cong R_2C_1= 12\cdot10^3* 2.2\cdot10^{-9} = 26.4\cdot10^{-6}$

Si verifichi che il partitore è compensato

T(msec)	f.s. (msec)	ν(Hz)	V_i (Volt)	f.s. (Volt)	V_u (Volt)	f.s. (Volt)	A
		100Hz-1MHz					

Esperienza n. 10 Partitore resistivo e sua compensazione. Partitore resistivo capacitivo

Fase 1: misure relative al partitore resistivo $R_1 = R_2 = 100\ k\Omega$



Osservazione: il fenomeno di deviazione del rapporto di partizione dal comportamento puramente resistivo (partitore compensato), quindi l'indipendenza del rapporto di partizione da ω, dipende dal valore delle resistenze rispetto alle capacità. Noi useremo $R_1 = R_2 = 100\ k\Omega$, mentre le capacità parassite sono dell'ordine di pF $\Rightarrow$ $1/(RC)$ è tale da consentirci l'osservazione della decrescita di V_u con ω a partire da >10kHz

Se usassimo $R \sim 100\Omega$ per ogni ω il rapporto di partizione = costante

Fase 3: misure relative al partitore resistivo-capacitivo