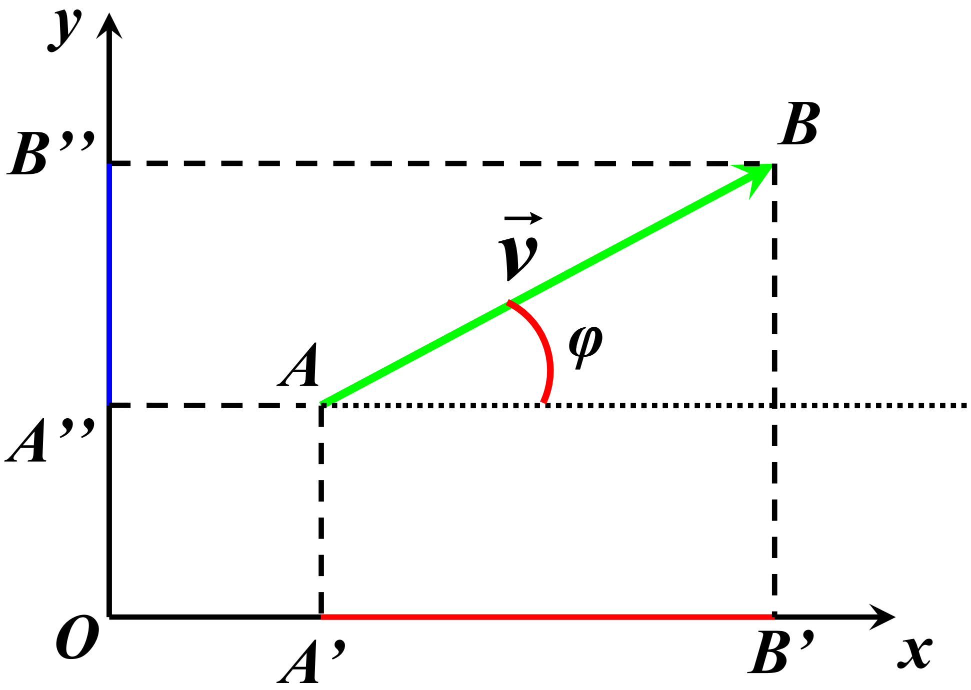
# I vettori

- *Grandezze scalari:*
  - ***vengono definite dal loro valore numerico***
  - ***esempi: lunghezza di un segmento, area di una figura piana, temperatura di un corpo, ecc.***
- *Grandezze vettoriali*
  - ***vengono definite, oltre che dal loro valore numerico, da una direzione e da un verso***
  - ***esempi: velocità di un corpo, forza agente su un corpo, ecc.***

# Vettori nel piano




*modulo di $\vec{v}$ = lunghezza del segmento AB*

*la direzione di $\vec{v}$ è definita dall'angolo φ*

*componente $v_x$ = lunghezza di A'B'*

*componente $v_y$ = lunghezza di A''B''*

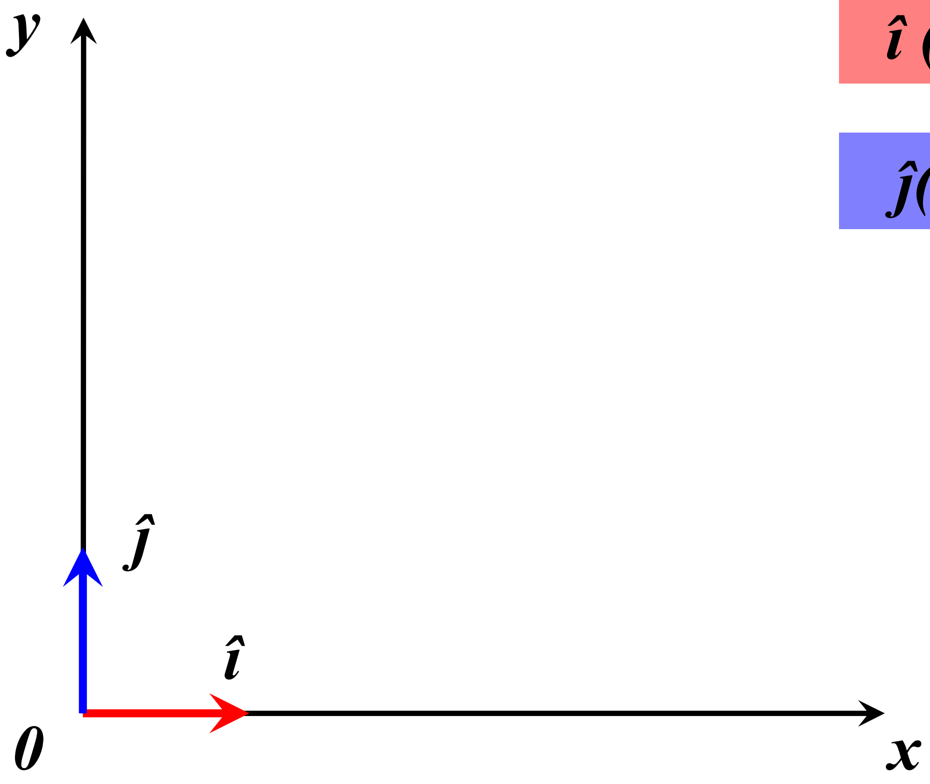
$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

# Versori

***versore* = vettore di lunghezza unitaria**




***î* (1,0) = versore dell'asse *x***

***ĵ*(0,1) = versore dell'asse *y***

# Prodotto di un vettore per uno scalare

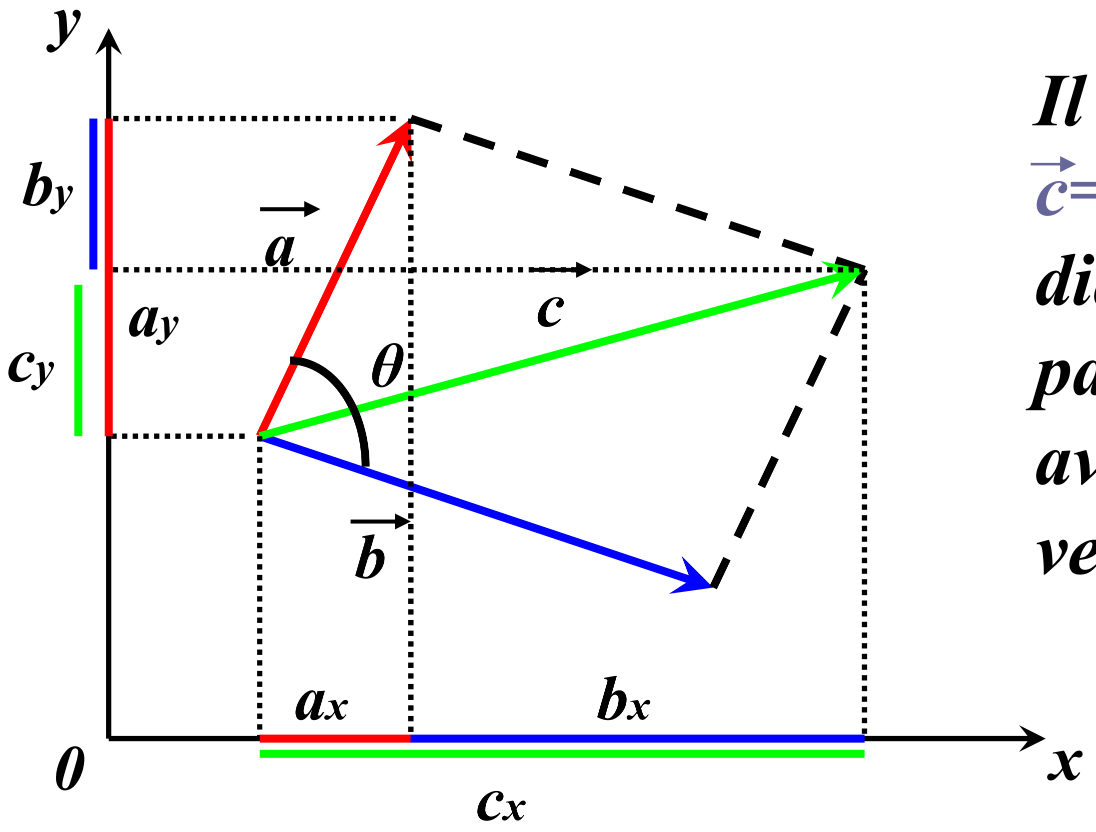
*Dati uno scalare $c$ ed un vettore $\vec{v}$, si definisce il prodotto $\vec{u}=c\vec{v}$.*

*Il vettore $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$. Il modulo di $\vec{u}$ è dato da:*

$$|\vec{u}| = |c| \cdot |\vec{v}|$$

*Il verso di $\vec{u}$ è lo stesso di $\vec{v}$ se $c>0$, è opposto a quello di $\vec{v}$ se $c<0$*

# Somma di due vettori



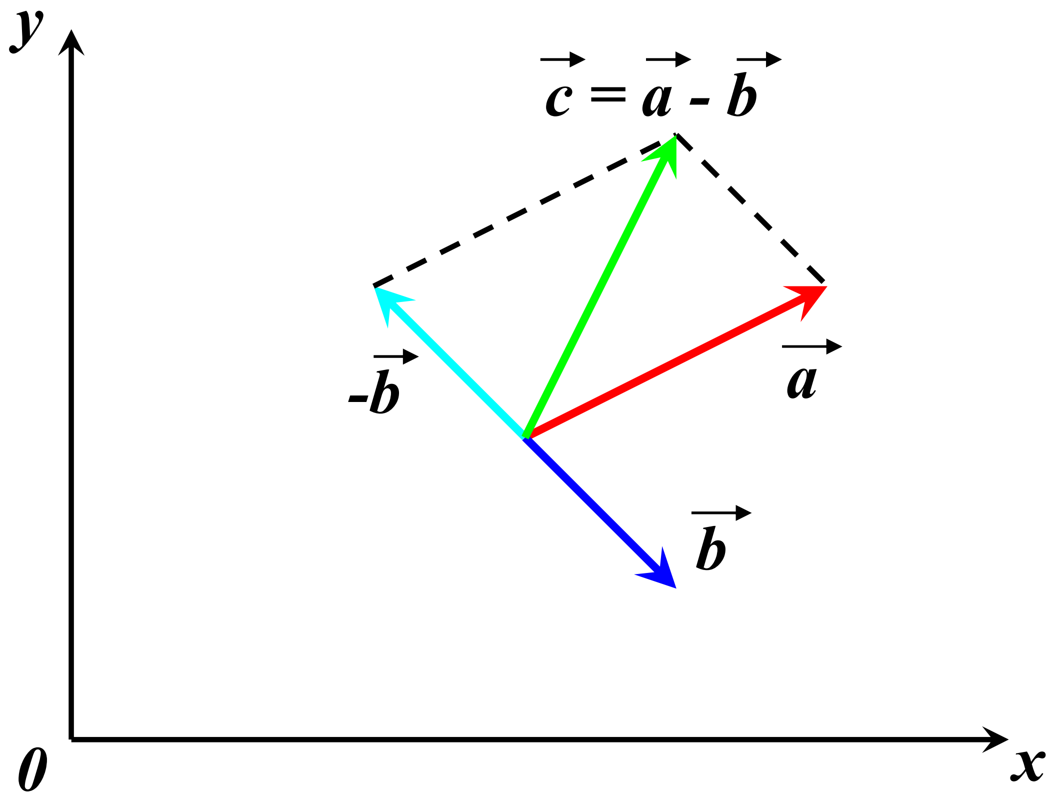

***Il vettore somma $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ è la diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$***

$$c_x = a_x + b_x$$
$$c_y = a_y + b_y$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$$

# Differenza di due vettori

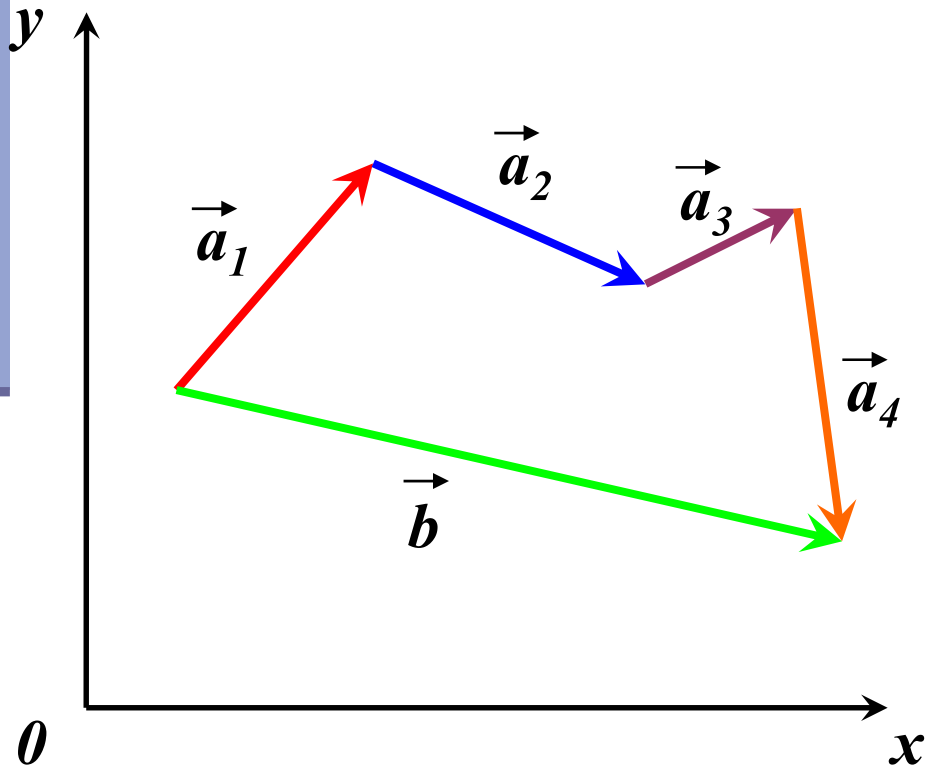
***La differenza $\vec{a}$ - $\vec{b}$ si calcola sommando al vettore $\vec{a}$ il vettore $-\vec{b}$, opposto del vettore $\vec{b}$***



# Somma di N vettori

***Dati i vettori*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_N$ ***il vettore somma*** $\vec{b} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_N$ ***si calcola nel modo seguente:***

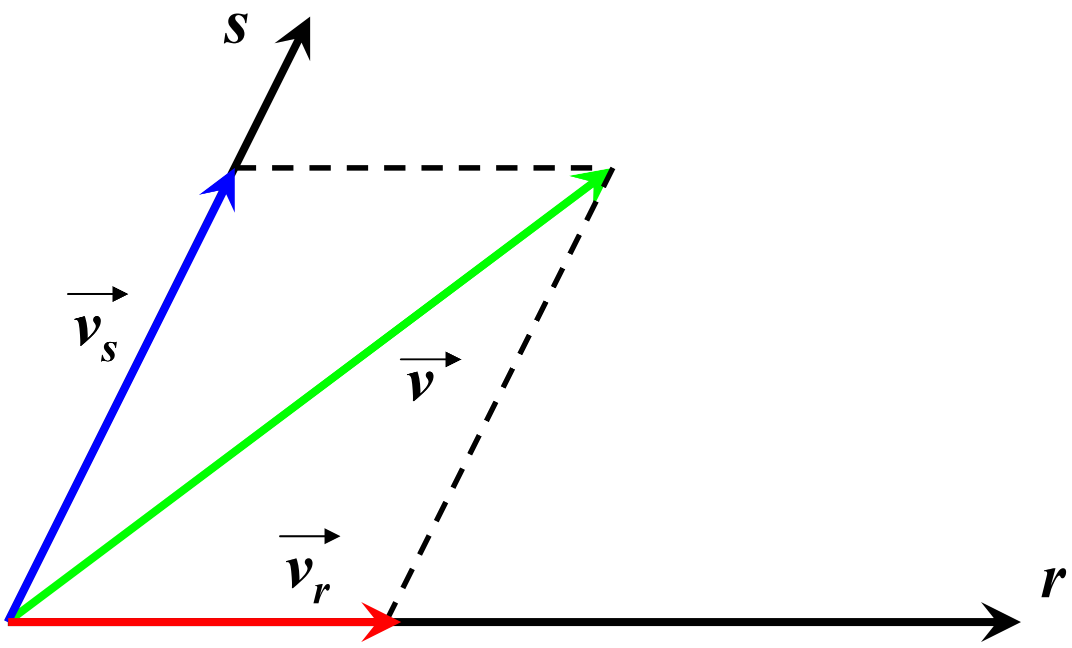
- ***si costuisce la spezzata formata dai vettori*** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_N$
- ***si congiungono i due estremi liberi di tale spezzata***




$$b_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{Nx}$$

$$b_y = a_{1y} + a_{2y} + \ldots + a_{Ny}$$

# Scomposizione di un vettore lungo due direzioni orientate r ed s

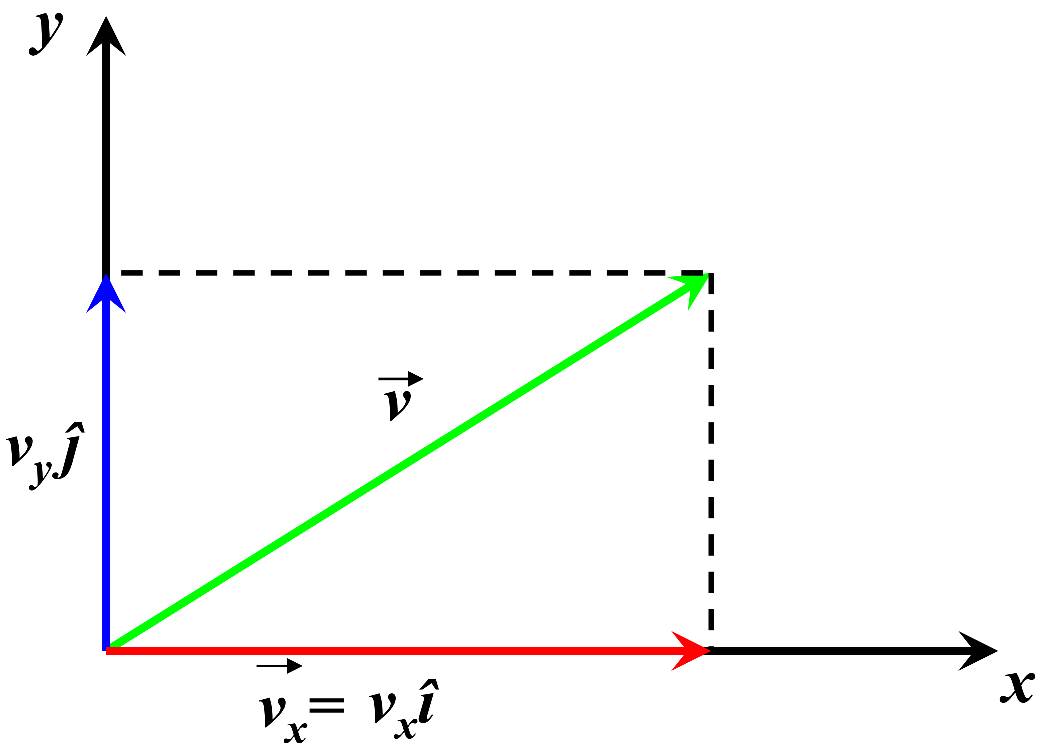



***Determinare due vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ paralleli rispettivamente a r ed s e tali che $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_s$***

***Dall'estremo libero di $\vec{v}$ si mandano la parallela a r verso s e la parallela a s verso r. Restano così definiti i vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$***

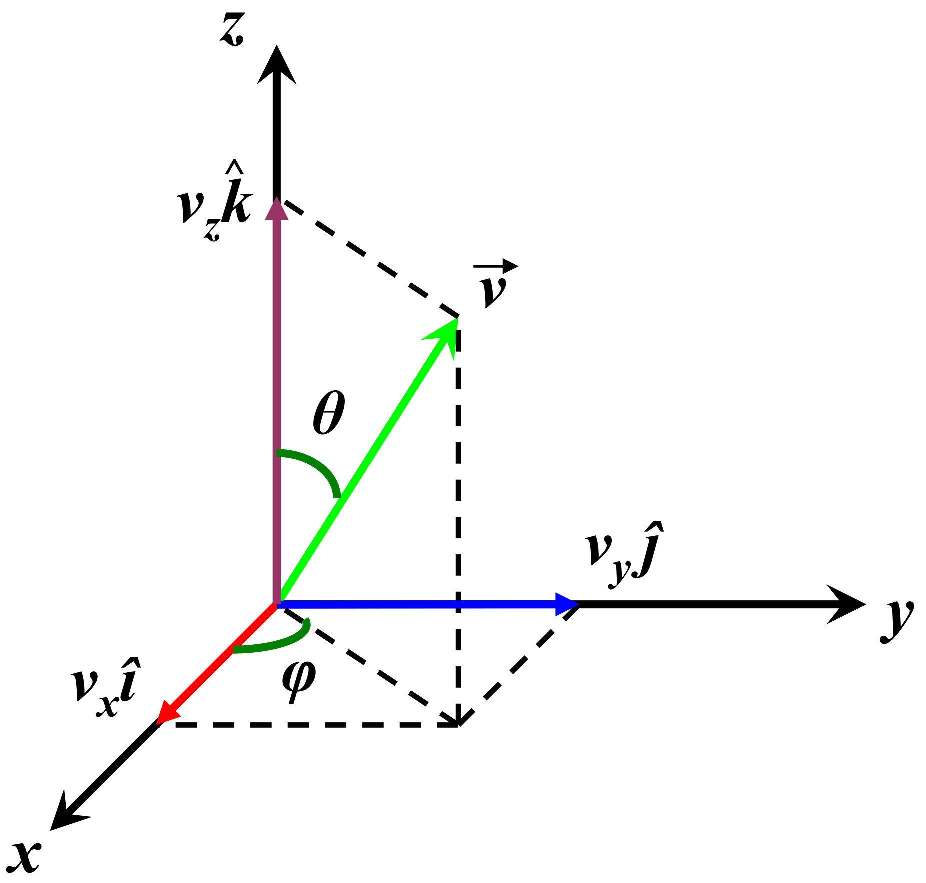
# Scomposizione lungo gli assi cartesiani

*Si tratta di un caso particolare di scomposizione, lungo le direzioni ortogonali degli assi cartesiani*




$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

# Vettori nello spazio




$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

*La direzione di $\vec{v}$ risulta definita dagli angoli $\theta$ e $\varphi$*

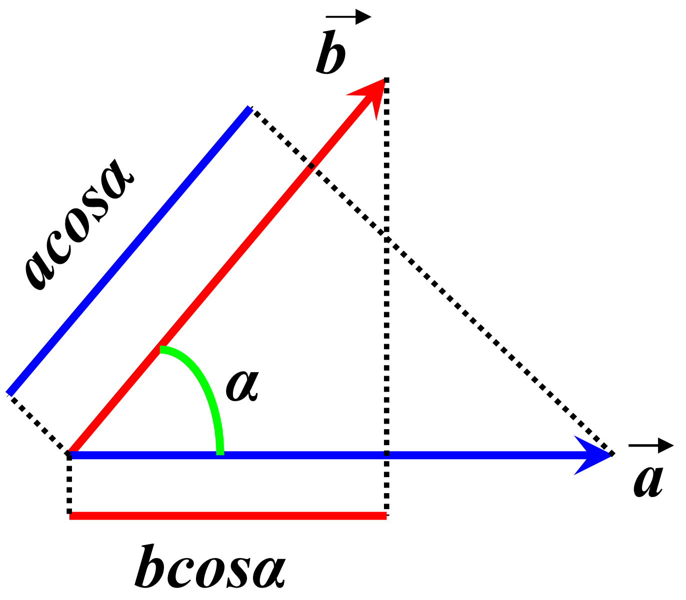
$$\theta = \arccos \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

# Prodotto scalare

*Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è una grandezza scalare definita nel modo seguente:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b \cos\alpha$$




*Il prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è un numero che è pari al prodotto del modulo di $\vec{a}$ per la componente di $\vec{b}$ lungo la direzione di $\vec{a}$*

*Ovviamente il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è anche pari al prodotto del modulo di $\vec{b}$ per la componente di $\vec{a}$ lungo la direzione di $\vec{b}$*

# Prodotto scalare in componenti cartesiane

*Tenendo conto del fatto che i versori degli assi cartesiani sono a due a due perpendicolari fra loro, si ha che:*

$$\hat{i}\cdot\hat{i}=1 \qquad \hat{i}\cdot\hat{j}=0 \qquad \hat{i}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{i}=0 \qquad \hat{j}\cdot\hat{j}=1 \qquad \hat{j}\cdot\hat{k}=0$$
$$\hat{k}\cdot\hat{i}=0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{j}=0 \qquad \hat{k}\cdot\hat{k}=1$$

*Di conseguenza, esprimendo i vettori in termini delle loro componenti cartesiane, si ha:*

$$\vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$$
$$\vec{b}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$$

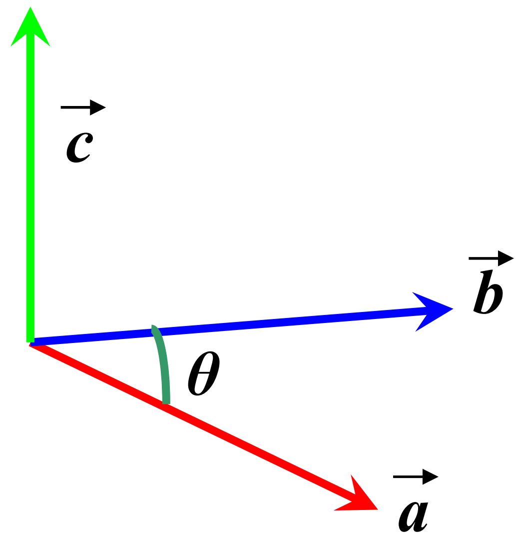
$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

*Caso particolare:* $\vec{b}=\vec{a}$ $\quad\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=a_x^2+a_y^2+a_z^2=\left|\vec{a}\right|^2$

# Prodotto vettoriale

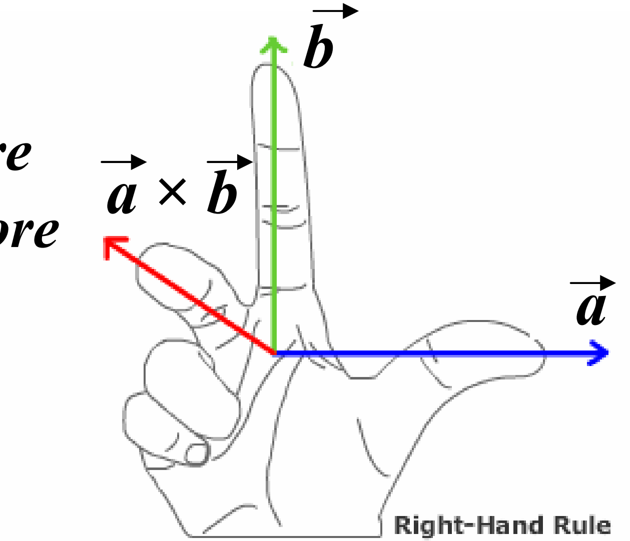
***Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il prodotto vettoriale $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che gode delle proprietà seguenti:***

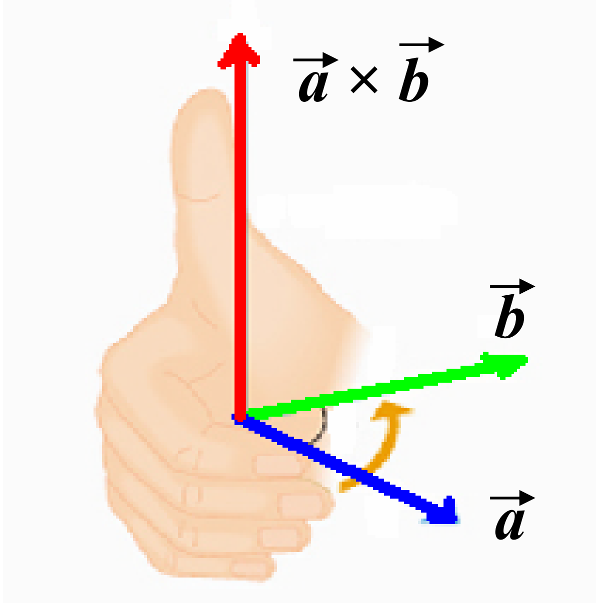
- ***il modulo di $\vec{c}$ è dato da $ab\sin\theta$, dove $\theta$ è l'angolo minore di 180° compreso tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$***
- ***la direzione di $\vec{c}$ è perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$***
- ***il verso di $\vec{c}$ è calcolato applicando la regola della mano destra***



# La regola della mano destra

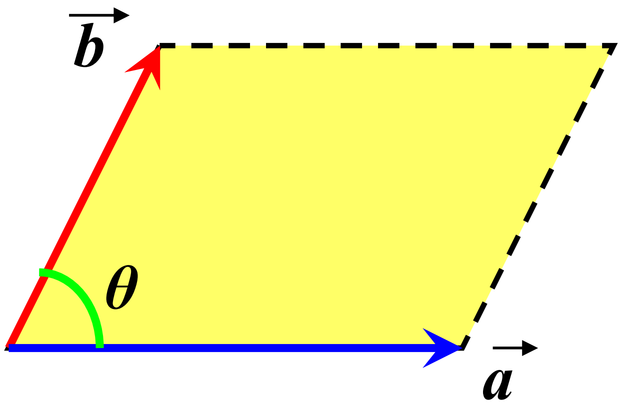
- *Prima formulazione*
  - ***Si dispone il pollice lungo il primo vettore***
  - ***Si dispone l'indice lungo il secondo vettore***
  - ***Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale***
- *Seconda formulazione*
  - ***Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice***
  - ***Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo $\theta$ di rotazione sia minore di 180°***
  - ***Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale***



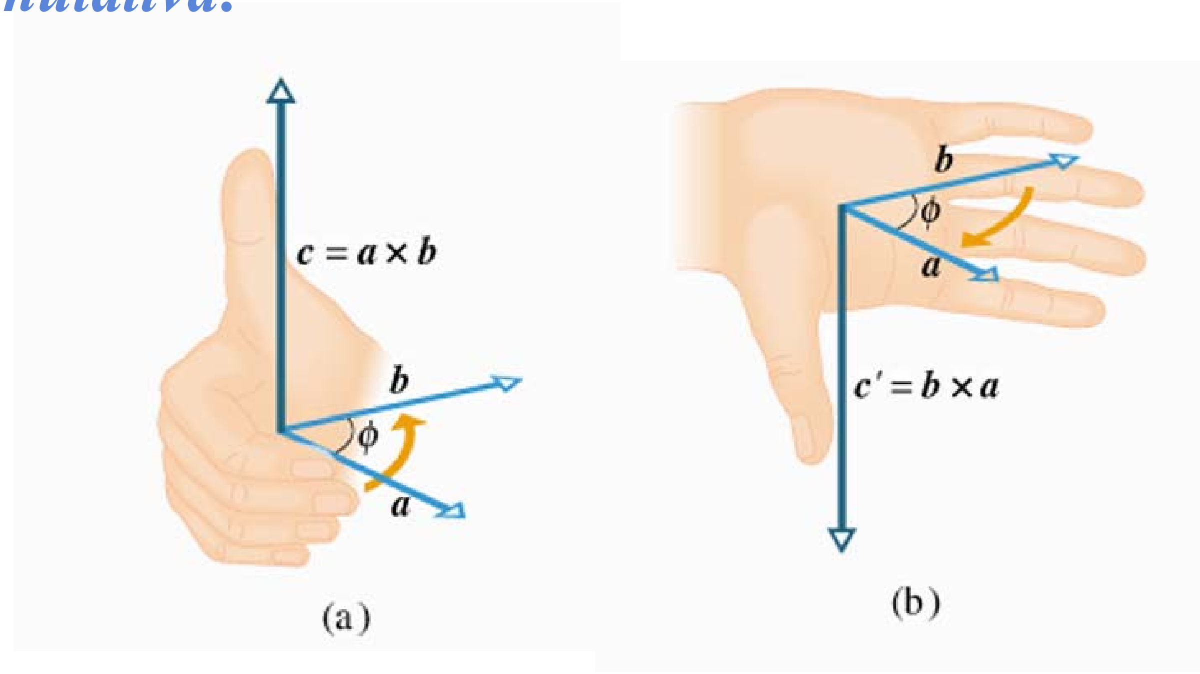



# Proprietà del prodotto vettoriale

- *Il modulo del prodotto vettoriale è pari all'area del parallelogramma individuato dai due vettori*
- *Il prodotto vettoriale è nullo se i due vettori sono paralleli ($\theta$=0)*
- *Il prodotto vettoriale gode della proprietà anticommutativa:*




$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$



# Prodotto vettoriale in componenti cartesiane

***Tenendo conto che i versori degli assi cartesiani sono a due a due perpendicolari fra loro, ed applicando la regola della mano destra, si hanno le seguenti relazioni:***

$$\begin{array}{lll} \hat{i}\times\hat{i}=0 & \hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} & \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j} \\ \hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} & \hat{j}\times\hat{j}=0 & \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} & \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i} & \hat{k}\times\hat{k}=0 \end{array}$$

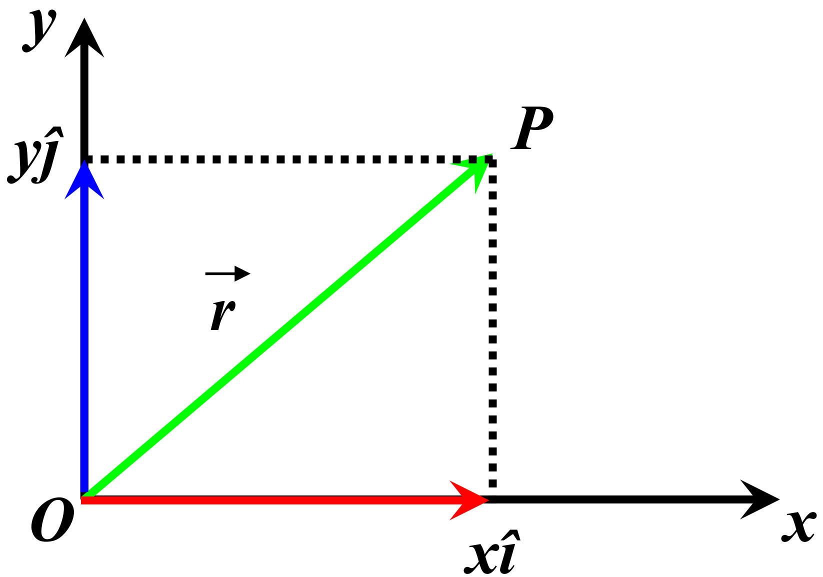
***Pertanto, esprimendo i vettori in termini delle loro componenti cartesiane, si ha che:***

$$\vec{a}\times\vec{b}=\hat{i}(a_y b_z - a_z b_y)+\hat{j}(a_z b_x - a_x b_z)+\hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

# Posizione di un punto nello spazio

***Una volta fissato un sistema di riferimento nello spazio, la posizione di un qualsiasi punto P dello spazio è individuata tramite il vettore posizione, ossia il vettore $\vec{r}$ che congiunge l'origine con il punto P***



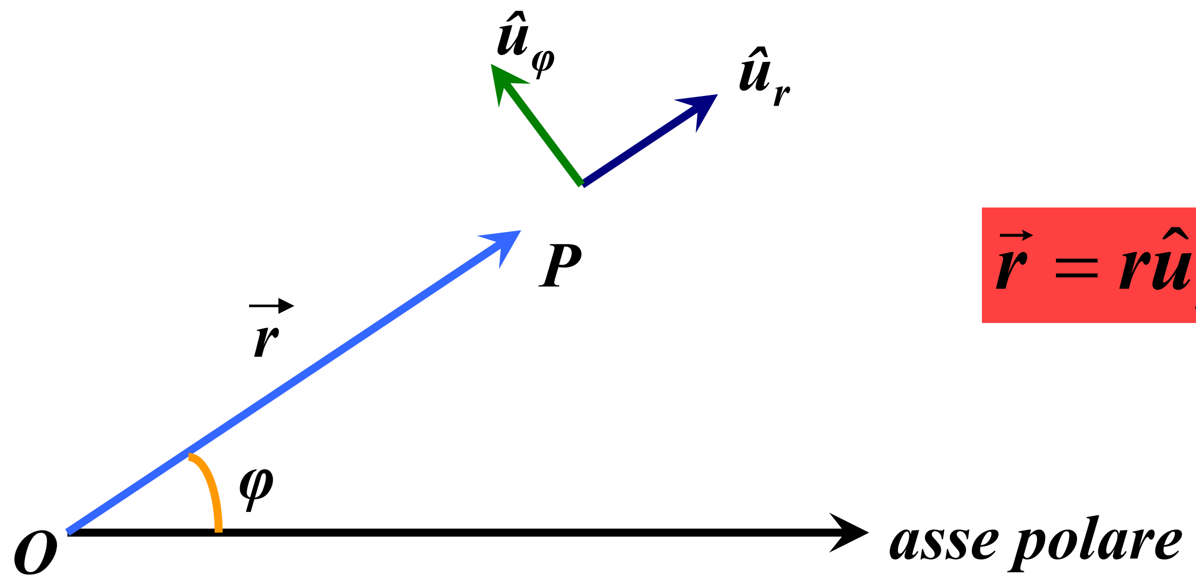

***In coordinate cartesiane, se P(x,y) il vettore posizione è dato da:***

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

# Posizione in coordinate polari

*La posizione di P è sempre data dal vettore posizione* $\vec{r}$

*Il vettore posizione* $\vec{r}$ *è ora espresso in termini dei versori* $\hat{u}_r$ *e* $\hat{u}_\varphi$




$$\boxed{\vec{r} = r\hat{u}_r}$$

$\hat{u}_r$ *= versore nella direzione radiale*

$\hat{u}_\varphi$ *= versore perpendicolare a* $\hat{u}_r$ *nella direzione delle* $\varphi$ *crescenti*

*I versori* $\hat{u}_r$ *e* $\hat{u}_\varphi$ *dipendono dalla posizione del punto P !!!*